

УДК 624.042.8

DOI: 10.30838/J.BPSACEA.2312.010920.128.663

МОДЕЛЮВАННЯ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА БУДІВЕЛЬНІ КОНСТРУКЦІЇ НА ПРИКЛАДІ ОДНОПРОГОНОВОЇ ШАРНІРНО ОБПЕРТОЇ БАЛКИ

ЯРОШЕНКО Д. С.¹, канд. техн. наук., доц.,
ГУСЛИСТА Г. Е.^{2*}, канд. техн. наук, доц.

¹ Кафедра металевих, дерев'яних та пластмасових конструкцій, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпро, Україна, тел. +38 (0562) 47-16-56, e-mail: YaroshenkoDenis@i.ua, ORCID ID: 0000-0002-2494-6082

^{2*} Кафедра залізобетонних та кам'яних конструкцій, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпро, Україна, тел. +38 (0562) 47-44-17, e-mail: GuslystaAnna@3g.ua, ORCID ID: 0000-0002-4486-0630

Анотація. *Постановка проблеми.* Аналіз публікацій із визначення динамічних навантажень на будівлі і споруди показав, що, по-перше, досі немає чіткої узгодженої термінології в цій галузі знань, по-друге, в різних сферах науки і техніки застосовувались різні підходи до визначення динамічних навантажень, по-третє, серед існуючих підходів недостатня увага приділена визначенню та моделюванню динамічних навантажень з урахуванням нелінійних властивостей досліджуваних систем. Математизовані дослідження довгий час обмежувалися математичними моделями, що ґрунтувались на вимірних «якимось способом» величинах. Набиралася статистика по вимірюваннях в імовірнісній постановці. Вводилися не тільки формули для функцій в детермінованому вигляді, а й нові терміни «спектральна щільність», «кореляційна функція». **Мета статті** – провести порівняльні розрахунки взаємодії системи «конструкція – навантаження» на прикладі однопрогонової шарнірно опертої балки і рухомого навантаження із врахуванням інерційності рухомої маси і демпфірувальних характеристик балки. **Методика.** Розрахунки проводились трьома методами: аналітичним, методом скінченних елементів у ПК SCAD і методом прямих у ПК Mathcad. Порівняльні розрахунки проведені за трьома схемами: 1) аналітичний розв'язок – без урахування інерційності рухомої маси і балки, демпфіруючих характеристик балки; модель будівельної конструкції континуальна; 2) розв'язок у ПК SCAD (метод скінченних елементів) без урахування інерційності рухомої маси, але з урахуванням демпфірувальних характеристик балки; модель будівельної конструкції дискретна (кількість скінченних елементів – 22); 3) розв'язок у ПК Mathcad («метод прямих») із врахуванням інерційності рухомої маси і демпфіруючих характеристик балки; модель будівельної конструкції дискретна (кількість степенів вільності – 21). **Висновок.** Аналітичний розв'язок зі всіма його спрощеннями майже повністю повторюється розв'язком в ПК SCAD (MSE) за відсутності внутрішнього тертя. Врахування внутрішнього тертя зменшує розрахункові прогини в середньому перерізі балки (для прийнятих параметрів задачі) на 1,9 %. Урахування сил інерції рухомого навантаження, навпаки, збільшує розрахункові прогини в середньому перерізі балки (для прийнятих параметрів задачі) на 1,2 %.

Ключові слова: динамічні навантаження і впливи; рухоме навантаження; моделювання; внутрішнє тертя; нелінійність

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ НА ПРИМЕРЕ ОДНОПРОЛЕТНОЙ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ БАЛКИ

ЯРОШЕНКО Д. С.¹, канд. техн. наук, доц.,
ГУСЛИСТАЯ А. Э.^{2*}, канд. техн. наук, доц.

¹ Кафедра металлических, деревянных и пластмассовых конструкций, Государственное высшее учебное заведение «Приднiпровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днипро, Украина, тел. +38 (05620) 47-16-56, e-mail: YaroshenkoDenis@i.ua, ORCID ID: 0000-0002-2494-6082

^{2*} Кафедра железобетонных и каменных конструкций, Государственное высшее учебное заведение «Приднiпровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днипро, Украина, тел. +38 (0562) 47-44-17, e-mail: GuslystaAnna@3g.ua, ORCID ID: 0000-0002-4486-0630

Аннотация. Постановка проблемы. Анализ публикаций по определению динамических нагрузок на здания и сооружения показал, что, во-первых, до сих пор нет четкой согласованной терминологии в этой области знаний, во-вторых, в разных областях науки и техники применялись различные подходы к определению динамических нагрузок, в-третьих, среди существующих подходов недостаточное внимание уделено определению и моделированию динамических нагрузок с учетом нелинейных свойств исследуемых систем. Математические исследования долгое время ограничивались математическими моделями, которые базировались на измеренных «каким-то способом» величинах. Набиралась статистика по измерениям в вероятностной постановке. Вводились не только формулы для функций в детерминированном виде, но и термины «спектральная плотность», «корреляционная функция». **Цель статьи** – провести сопоставительные расчеты взаимодействия системы «конструкция – нагрузка» на примере однопролетной шарнирно опертой балки и подвижной нагрузки с учетом инерционности подвижной массы и демпфирующих характеристик балки. **Методика.** Расчеты велись тремя методами: аналитическим, методом конечных элементов в ПК SCAD и методом прямых в ПК Mathcad. Сравнительные расчеты проведены по трем схемам: 1) аналитическое решение – без учета инерционности подвижной массы и балки, демпфирующих характеристик балки; модель строительной конструкции континуальная; 2) решение в ПК SCAD (метод конечных элементов) без инерционности подвижной массы, но с учетом демпфирующих характеристик балки; модель строительной конструкции дискретная (количество конечных элементов – 22); 3) решение в ПК Mathcad («метод прямых») с учетом инерционности подвижной массы и демпфирующих характеристик балки; модель строительной конструкции дискретная (количество степеней свободы – 21). **Выводы.** Аналитическое решение со всеми его упрощениями почти полностью повторяется решением в ПК SCAD (МКЭ) при отсутствии внутреннего трения. Учет внутреннего трения уменьшает расчетные прогибы в среднем сечении балки (для принятых параметров задачи) на 1,9 %. Учет сил инерции подвижной нагрузки, наоборот, увеличивает расчетные прогибы в среднем сечении балки (для принятых параметров задачи) на 1,2 %.

Ключевые слова: динамические нагрузки и воздействия; подвижная нагрузка; моделирование; внутреннее трение; нелинейность

MODELING OF BUILDING STRUCTURES LOADED BY MOVABLE MASS BY THE EXAMPLE OF THE SINGLE SPAN HINGEDLY FIXED BEAM

YAROSHENKO D.S.¹, *Cand. Sc. (Tech.), Assoc. Prof.*,
GUSLYSTA A.E.^{2*}, *Cand. Sc. (Tech.), Assoc. Prof.*

¹ Department of Metal, Wood and Plastic Structures, State Higher Education Institution “Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-a, Chernyshevskoho Str., 49600, Dnipro, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-16-56, e-mail: YaroshenkoDenis@i.ua, ORCID ID: 0000-0002-2494-6082

^{2*} Department of Reinforced Concrete and Masonry Constructions, State Higher Education Institution “Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-a, Chernyshevskoho Str., 49600, Dnipro, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-44-17, e-mail: GuslystaAnna@3g.ua, ORCID ID: 0000-0002-4486-0630

Abstract. Problem statement. Publications review of methods for determining the dynamic loads on buildings and structures has shown that there is no clear agreed terminology in this field of expertise yet. In addition, different approaches to determining the dynamic loads have been used in various fields. Moreover, the existing techniques had insufficient attention to dynamic loads modelling based on non-linearity properties of the systems. For many years mathematical investigations were limited to mathematical models based upon measured values by some means. Measurements statistics were produced in a probabilistic way. Not only formula for the function in a deterministic form, but also such terms as spectral density and correlation functions have been established. **Purpose.** To undertake a comparative study of interactions in system *structure-loads*, considering the inertia of the movable load and damping (shock-absorbing) characteristics of the beam. **Methods.** Estimates have been provided by three methods: analytical, finite element method (FEM) using SCAD software and the method of straight lines with the help of Mathcad software. All calculations were performed according to three schemes: 1) analytical solution – without taking into account the inertia of the movable mass and beam, damping characteristics of the beam; the model of the building structure is continual; 2) finite element analysis using SCAD software – without taking into account the inertia of the movable mass but considering damping characteristics of the beam; the model of the building structure is discrete (the number of finite elements – 22); 3) the solution of straight lines method using Mathcad – taking into account the inertia of the movable mass and damping characteristics of the beam; the model of the building structure is discrete (the number of degrees of freedom – 21) **Conclusion.** Despite all simplifications, analytical results equal to FEM results without internal friction. Internal friction can reduce design beam deflection in the mid-point (by the assigned parameters) by 1,9 %.

Introduction of the inertial forces of the movable mass instead increases design beam deflection in the mid-point (by the assigned parameters) by 1,2 %.

Keywords: *dynamic loads and actions; movable load; modelling; internal friction; non-linearity*

Постановка проблеми. Задачі вивчення і нормування динамічних впливів з'являлись та розв'язувались по-різному у математиків (прикладних механіків), машинобудівників (і машинознавців), у будівельників (проектувальників-розраховувачів і конструкторів, експлуатаційників і ремонтників). Це стосується і вибору шляхів моделювання і розрахунків для розв'язання більшості будівельних задач на різні види динамічних навантажень і впливів, включаючи в них такі додаткові як складнонаправлені сейсмічні (із запізненням у часі і нелінійному ґрунтовому просторі), транспортні (з нелінійно підресореними екіпажами при довільних інтервалах, швидкостях руху і навантаженнях на осі) та інші.

Тут неможливе коректне застосування «для всіх випадків» і досить застарілих «статичних» ліній впливу, й однакового умовного динамічного коефіцієнта, а не змінних його епюр для різних просторових форм і сполучень частот власних і вимушених коливань (за складних і групових впливів).

Аналіз публікацій із визначення динамічних навантажень на будівлі і споруди

Спочатку згадаємо про «багатство» і різноманіття «збурень» і про найбільш звичні, але часто неправильні, застарілі терміни. Ці терміни з'являлись і закріплювались в інженерній мові з часом по-різному.

Математизовані дослідження «динаміки входів», наприклад, у транспортників довгий час обмежувались математичними моделями, що ґрунтувались на вимірних «якимось способом» величинах. Наприклад, набиралася статистика по вимірах так званої «нерівності Тимошенка» (такої собі ямки на стиках рейок – довжина l і глибина d ділянки синусоїди):

$$y = \frac{d}{2} \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi \cdot x}{l}\right) \quad (1)$$

У досліджах до стелі залізничного вагона підвищувався вантаж на м'якій пружині, а вертикальні переміщення підлоги вагона відносно «умовно нерухомої точки» під час руху вагона на більш високих частотах реєструвались на записувальному пристрої (праці М. М. Кудрявцева [2; 3]). Або вимірювались прискорення буксових вузлів і задавались в модель вагона, тобто система розривалася на підсистеми (див. праці школи В. А. Лазаряна [4; 5]). До того ж, не тільки залізничники, а й автомобілісти почали в 1970-х роках збирати збурення на екіпаж від «шляху» (від автодороги – див. публікації А. Сілаєва [6]) в імовірнісній постановці. Вводилися не тільки формули для функцій в детермінованому вигляді, а й нові терміни «спектральна щільність», «кореляційна функція». До речі, «випадковий» полігармонічний профіль шляху і нелінійні коливання підсистем розглядалися також у працях В. В. Кулябко, В. В. Єлісеєва [7; 8].

Подібним шляхом розвивалися задачі вивчення і нормування динамічних впливів також у будівельників. Приймалися як окремі динамічні сили і поля сил – силові навантаження у часовій області. Інколи допускалося приймати їх як *квазістатичні*, або умовні – *опосередковані*, з використанням найпростішого динамічного коефіцієнта.

Наприклад, силові моногармонічні впливи. Так довгий час спрощено розраховувались споруди за впливу на їх перекриття машин з рухомими (з кутовою частотою θ і дебалансом e) частинами масою $m_{об}$. Динамічної сили з амплітудою $P_0 = m_{об} \cdot e \cdot \theta^2$. В точці прикріплення машини до конструкції прикладалася (в ручному розрахунку або на ПК із застосуванням МСЕ) змінна збурювальна сила:

$$P(t) = P_0 \cdot \sin(\theta \cdot t) \quad (2)$$

Аналогічно можна перейти до впливу на навколишнє середовище віброзанурення

палі, є відповідні рекомендації із поширення, наприклад, у навколишнє ґрунтове середовище амплітуди вібрацій підосви фундаменту конкретного розміру, що зменшуються (з ростом віддаленості об'єкта), під час роботи машини. Деяка аналогія грубого переходу в моделях до силового впливу ϵ і в переході до «умовно силового», еквівалентному кінематичному – для початкових розрахункових прикидок на *сейсмічний* вплив. Тут потрібна акуратність вибору всієї моделі з великими масивами нелінійного ґрунту і реальними впливами вимірних на аналогічних площадках віброграм (зазвичай – прискорень, акселерограм). На нашу думку, поки що альтернативи застосуванню при цьому *прямого динамічного методу* розрахунку ще немає.

Звичайно, сучасному інженеру-будівельнику *треба ще враховувати* (що раніше не завжди робилося і в нормах, і в програмних комплексах, і в інженерній практиці) *таке*:

1. Під час створення розрахункової схеми і динамічної моделі (навіть за моногармонічного впливу) – розташування опор машини, осей обертання мас у просторі, їх прив'язку до осей, відміток, напрямків і властивостей конструктивних елементів споруди.
2. Перехідні режими розгону і гальмування двигуна.
3. Частотний спектр власних коливань усієї споруди або її основних підсистем.
4. Дисипативні властивості основних матеріалів і конструкцій системи – вони повинні в загальній моделі враховуватись різними (часто – на порядок) декрементами коливань, а не як у більшості ПК – однаковими для всього об'єкта.
5. Частоти і спектри вимушених коливань залежать від складності агрегатів машин, від кількості двигунів – наприклад, лісопилні рами під час роботи створюють бігармонічні впливи.

І багато іншого, особливо за наявності *нелінійностей!*

Зокрема, формули типу (3.1) можна застосовувати за будь-яких дзвоноподібних впливів у часі, фіксуючи початок передачі цього навантаження на об'єкт. Це може бути одиночний подув вітру (що рекомендується в книзі Фьоршинга про вітрові впливи). Або удар молота в споруді або штампувального верстата на перекритті, копра під час забивання палі поблизу фундаментів споруди і т. п.

Зазначимо, що форма одиночного імпульсу типу (3.1) впливає на спектральну щільність одного імпульсу і на обвідну спектральної щільності серії *повторюваних таких імпульсів* з періодом-інтервалом $T_{\text{ударів}}$.

Потребують конкретних розробок і створення розрахункових методик навантаження будівельних і загороджувальних об'єктів від впливів цунамі, ударів під час падіння літальних апаратів та інших тіл, що летять (у т. ч. за навчальних або воєнних дій). Наприклад, для імпульсів різного походження, від аерокосмічного – типу астероїдів, метеоритів, і до іншого, кліматичного типу: торнадо, подуву вітру за особливих умов меж зон тиску і тощо.

Також звернемо особливу увагу на необхідність досліджень динамічних навантажень і впливів саме в системах із *нелінійними властивостями, з перемінними коефіцієнтами* диференціальних рівнянь руху, змінними в часі (*швидкому, короткому періоду на високих частотах і різних «позиційних» амплітудах, і довгому – за зміни властивостей зі зміною пір року*) і *просторі* параметрами (пружними, інерційними, дисипативними), які за вимогами строгої *нелінійної механіки* не можна відділяти від статичного рівня навантажень і потім результати підсумовувати (такі «помилкові суми реакцій на окремо прикладені статичку і динаміку» друкуються в багатьох будівельних вітчизняних ПК).

Звичайно, опоненти можуть заперечити, що «нелінійностей в них нема», на що хочеться нагадати, що в реальних системах

«лінійних систем нема»! Так само доречно нагадати історичну аналогію про те, що довгі роки будівельники конструювали «майже статично визначувані системи, СВС», тому що розраховувати невизначені, СНС, ще не вміли.

Мета дослідження – провести порівняльні розрахунки взаємодії системи «конструкція – навантаження» на прикладі однопрогонової шарнірно обпертої балки і рухомого навантаження трьома методами: аналітичним, методом скінченних елементів у ПК SCAD і методом прямих у ПК Mathcad.

Виклад основного матеріалу. Порівняння моделей рухомого навантаження на будівельні конструкції

Проблемою моделювання рухомого навантаження на будівельні конструкції інженери і науковці займаються вже понад 170 років (з часу обвалення Честерського мосту у 1847 році). Історично дана задача вирішувалася у чотирьох варіантах:

- 1) інерційність балки і рухомого вантажу вважається малою, розглядається система «неінерційна балка + рухома сила»;
- 2) інерційність балки вважається малою, інерційність рухомого вантажу враховується, розглядається система «неінерційна балка + рухома маса»;
- 3) інерційність рухомого вантажу вважається малою, інерційність балки враховується, розглядається система «інерційна балка + рухома сила»;
- 4) враховується інерційність балки і рухомого вантажу.

Очевидно, що останній варіант моделювання найбільш точний. Проте і досі в сучасних програмних комплексах (вітчизняних SCAD, LIRA й іноземних, наприклад, SAP 2000) взаємодія «конструкція – навантаження» відбувається за третім варіантом. До того ж, у переважній більшості інженерних

розрахунків не розглядаються питання пружно-демпфірувальних властивостей підвіски транспортного засобу.

У рамках цього дослідження проведено порівняльні розрахунки такої взаємодії на прикладі однопрогонової шарнірно обпертої балки і рухомого навантаження за трьома схемами розрахунку:

1) аналітичний розв’язок – без урахування інерційності рухомої маси і балки, демпфірувальних характеристик балки; модель будівельної конструкції континуальна;

2) розв’язок у ПК SCAD (метод скінченних елементів) без урахування інерційності рухомої маси, але з урахуванням демпфірувальних характеристик балки; модель будівельної конструкції дискретна (кількість скінченних елементів – 22);

3) розв’язок у ПК Mathcad («метод прямих») з урахуванням інерційності рухомої маси і демпфірувальних характеристик балки; модель будівельної конструкції дискретна (кількість степенів вільності – 21).

Розглядалися коливання балки у вертикальній площині.

Параметри балки:

- довжина 55 м;
- згинальна жорсткість у площині коливань – $2,6 \cdot 10^{11}$ Нм²;
- розподілена маса балки – 3 660 кг/м;
- маса рухомого навантаження – 124 т;
- швидкість руху – 60 км/год;
- логарифмічний декремент коливань за першою формою вільних коливань – 0,079.

1. Аналітичний розв’язок.

Аналітичний розв’язок даної задачі в описаній вище постановці було отримано близько 100 років тому. Переміщення в часі від руху сили по довжині балки описуються наступним рівнянням:

$$y(t) = \frac{2 \cdot P \cdot L^3}{m \cdot \pi^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot v \cdot t}{L}\right)}{i^2 \cdot \left(i^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{EI}{mL} \cdot \frac{v^2}{L^2}\right)} - \frac{2 \cdot P \cdot L^3 \cdot v}{m \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}}} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{i^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{EI}{mL} \cdot t}{L^2}\right)}{i^2 \cdot \left(i^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{EI}{mL} \cdot \frac{v^2}{L^2}\right)}, \quad (1)$$

де:

P – величина рухомої сили, Н;

\bar{m} – розподілена по довжині маса балки, кг/м;

L – довжина балки, м;

i – кількість членів ряду, що враховуються у розв’язанні задачі;

v – швидкість руху навантаження, м/с;

x – розглядуваний переріз балки, м;

t – час, с.

Таким чином, точність результату залежить від кількості членів ряду, що були

враховані в обчисленні. Для даних параметрів задачі було виявлено, що уточнення результату майже не відбувається після врахування п’ятого члена ряду.

2. Розв’язок у ПК SCAD (метод скінчених елементів). Навантаження на балку передається у вигляді серії зосереджених у вузлах сил, величина яких змінюється від нуля до повної величини і знову до нуля (для перших трьох вузлів моделі балки див. рис. 1).

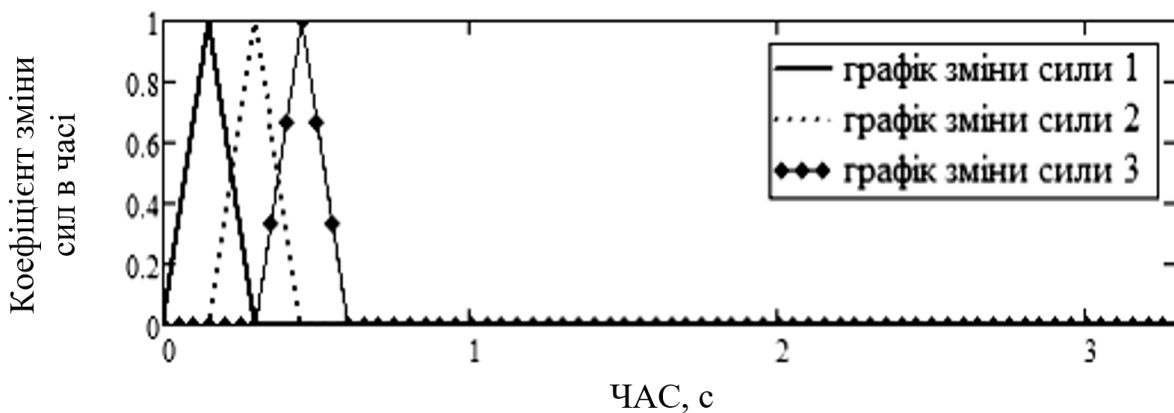


Рис. 1. Коефіцієнт зміни сил у часі

Таким чином, моделювання рухомого навантаження в даній постановці полягає у послідовній передачі змінного в часі навантаження на вузли моделі будівельної конструкції. ПК SCAD дає можливість задавати внутрішнє тертя в моделях конструкцій за двома формами вільних коливань. Розглядалися варіанти з нульовим тертям і з тертям, що відповідає логарифмічному декременту коливань на рівні 0,079 за двома формами.

3. Розв’язок у ПК Mathcad («метод прямих»). Для врахування інерційності маси рухомого навантаження маси по узагальнених координатах моделі балки моделювались змінними (як на рис. 1), таким чином, розглядалися параметричні коливання динамічної моделі балки. Логарифмічний декремент коливань за першою формою складав 0,079, за другою формою – 0,316 (ця методика створення динамічних моделей конструкцій передбачає, що внутрішнє тертя

пропорційне частоті власних коливань моделі, для шарнірно обпертої балки, як відомо, частоти власних коливань співвідносяться як $1 : 4 : 9 : \dots$ (номер форми)²).

Результати розрахунків для середини прольоту наведені на рисунках 2 – 4. За початок відліку приймався рівень статичних прогинів, тому на рисунках 2 – 4 показано прогини, зумовлені лише динамічним навантаженням.

Висновок

Аналізуючи результати розрахунків, можна зробити такі висновки:

- аналітичний розв’язок зі всіма його спрощеннями майже повністю повторюється розв’язком в ПК SCAD (МСЕ) за відсутності внутрішнього тертя;

- урахування внутрішнього тертя зменшує розрахункові прогини в середньому перерізі балки (для прийнятих параметрів задачі) на 1,9 %;

- урахування сил інерції рухомого навантаження, навпаки, збільшує розрахункові прогини в середньому перерізі балки (для прийнятих параметрів задачі) на 1,2 %.

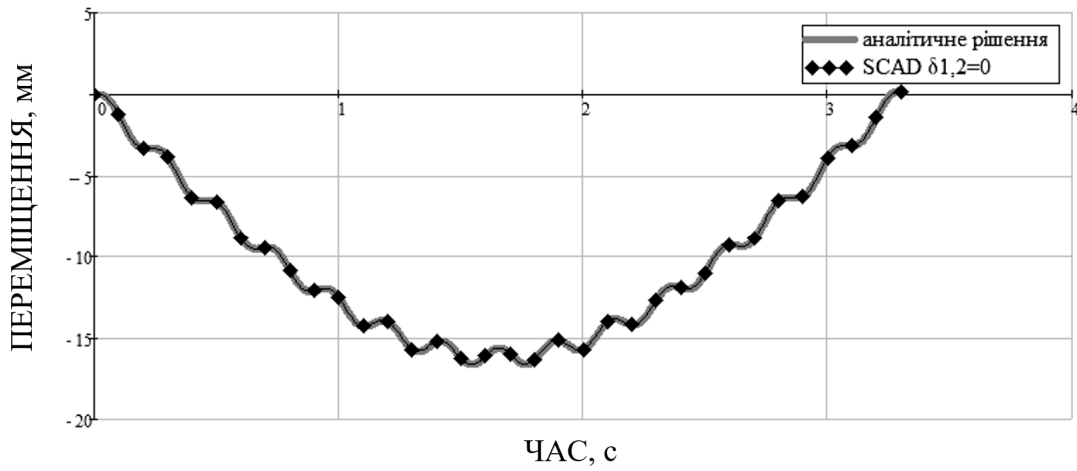


Рис. 2. Результати аналітичного розрахунку і розрахунку в ПК SCAD за відсутності внутрішнього тертя в конструкції

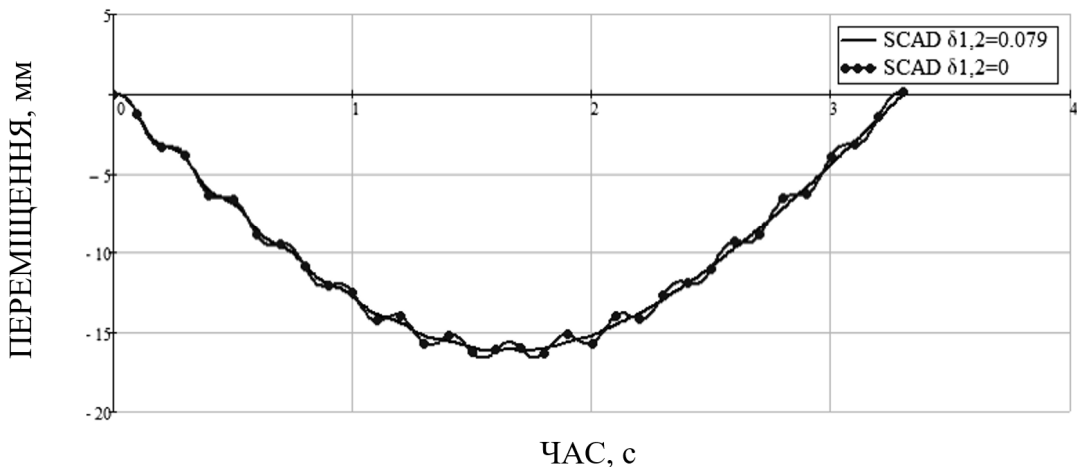


Рис. 3. Результати розрахунку в ПК SCAD за відсутності внутрішнього тертя в конструкції (графік SCAD $\delta_{1,2} = 0$) і за наявності внутрішнього тертя (логарифмічний декремент за першими двома формами становить 0,079)

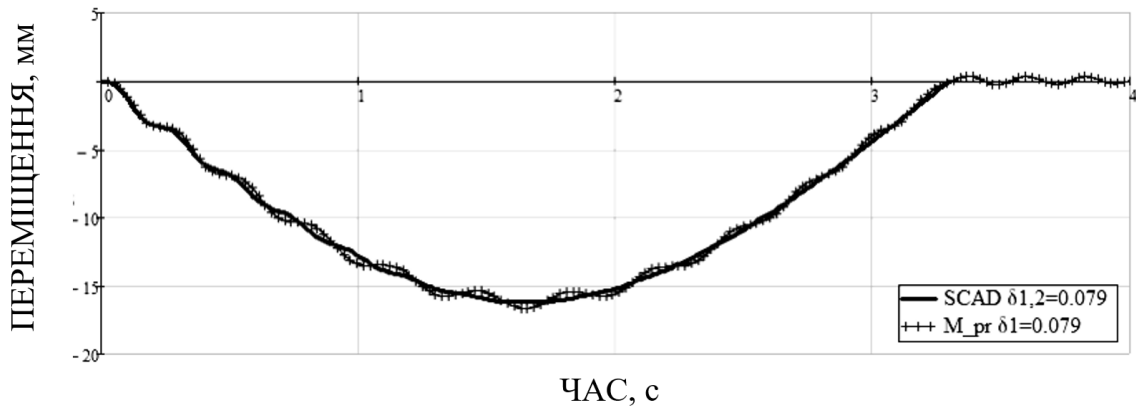


Рис. 4. Результати розрахунку в ПК SCAD за наявності внутрішнього тертя (рухоме навантаження – сила) і в ПК Mathcad (рухоме навантаження – маса)

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. Москва : Наука, 1967. 444 с.
2. Кудрявцев Н. Н. Исследование динамики необрессоренных масс вагонов [Текст]. *ВНИИЖТ*. 1965. Вып. 287. 255 с.
3. Кудрявцев Н. Н., Белоусов В. Н., Бурчак Г. П. Определение вертикальных возмущений, вызывающих колебания обрессоренных частей вагона при движении по рельсовому пути [Текст]. *ВНИИЖТ*. 1982. № 5. С. 33–35.
4. Лазарян В. А. Исследования неустановившихся режимов движения поезда [Текст]. Москва : Трансжелдориздат, 1949. 136 с.
5. Лазарян В. А. Динамика вагонов. Устойчивость движения и колебания. Москва : Транспорт, 1964. 175 с.
6. Силаев А. А. Спектральная теория поддресоривания транспортных машин. Москва : Машиностроение, 1972. 192 с.
7. Кулябко В. В. Динамика конструкций, зданий и сооружений. Ч. 1: Статико-динамические модели для анализа свободных колебаний и взаимодействия сооружений с основаниями и подвижными нагрузками: учеб. пособ. Запорожье, 2005. 232 с.
8. Kulyabko V., Chaban V., Makarov A., Yaroshenko D. Taking account of nonlinear properties of subsystems in problems of dynamic interaction of structures with loads, bases and flows. *Nonlinear Dynamics – 2016: Proceedings of the 5th International Conference. National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute” at al. Kharkiv, 2016*. Pp. 125–132.
9. Garg V. K., Dukkipati R. V. Dynamics of railway vehicle systems. New-York : Academic Press, 1984. 76 p.
10. Dukkipati R. V. Dynamics of wheelset on roller rig. *Vehicle System Dynamics*. 1998. Vol. 30. Pp. 409–430.
11. Dukkipati R. V. Vehicle Dynamics. New Delhi : CRC Press, 2000. 85 p.
12. Dukkipati R. V., Amyot J. R. Computer-Aided Simulation in Railway Dynamics. New-York : Marcel-Dekker, 1988. 74 p.
13. Редченко В. П. Динамічні випробування мостів. Ч. 2: Вільні коливання, модальний контроль : монографія. Дніпро : Пороги, 2017. 216 с.
14. Ярошенко Д. С., Гуслиста Г. Е. Нелінійні динамічні моделі будівель, споруд і середовищ в математичному пакеті Mathcad. *Строительство. Материаловедение. Машиностроение*. 2017. Вып. 101. С. 235–239.

REFERENCES

1. Tymoshenko S.P. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Vibration in engineering]. Moscow : Nauka Publ., 1967, 444 p. (in Russian).
2. Kudryavtsev N.N. *Issledovaniye dinamiki neobressorenykh mass vagonov* [Dynamic study of unsprung mass of wagons]. *VNIIZHT* [Joint Stock Company Railway Research Institute]. 1965, vol. 287, 255 p. (in Russian).
3. Kudryavtsev N.N. *Opredeleniye vertical'nykh vozmushcheniy vyzyvayushchikh kolebaniya obressorenykh chastey vagona pri dvizhenii po rel'sovomu puti* [Determination of vertical disturbance causing vibration of the sprung parts of the wagon upon movement by rail tracks]. *VNIIZHT* [Joint Stock Company Railway Research Institute]. 1982, vol. 5, pp. 33–35. (in Russian).
4. Lazaryan V.A. *Issledovaniya neustanovivshikhsya rezhimov poyezda* [Study of unfixed train regimes]. Moscow : Transzheldorizdat Publ., 1949, 136 p. (in Russian).
5. Lazaryan V.A. *Dinamika vagonov. Ustoychivost' dvizheniya i kolebaniya* [Railway Dynamics. Stability of motion and vibration]. Moscow : Transport Publ., 1964, 175 p. (in Russian).
6. Silaev A.A. *Spectral'naya teoriya podressorivaniya transportnykh mashin* [Spectral cushioning theory of transportation vehicles]. Moscow : Mashinostroyeniye Publ., 1972, 192 p. (in Russian).
7. Kulyabko V.V. *Dinamika konstruksiy, zdaniy i sooruzheniy. Chast' 1: Statiko-dinamicheskiye modeli dlya analiza svobodnykh kolebaniy i vzaimodeystviya sooruzheniy s osnovaniyami i podvizhnymi nagruzkami* [Dynamics of structures, buildings and constructions. Part 1: Statics-dynamics models for analysis of free vibrations and interaction between buildings and soil bases and movable loads]. Zaporozh'ye, 2005, 232 p. (in Russian).
8. Kulyabko V., Chaban V., Makarov A. and Yaroshenko D. Taking account of nonlinear properties of subsystems in problems of dynamic interaction of structures with loads, bases and flows. *Nonlinear Dynamics–2016 : Proceedings of the 5th International Conferenc. National Technical University “ Kharkiv Polytechnic Institute” at al. Kharkiv, 2016*, pp. 125–132.
9. Garg V. K. and Dukkipati R.V. Dynamics of railway vehicle systems. New-York : Academic Press, 1984, 76 p.
10. Dukkipati R.V. Dynamics of wheelset on roller rig. *Vehicle System Dynamics*. 1998, vol. 30, pp. 409–430.
11. Dukkipati R.V. Vehicle Dynamics. New Delhi : CRC Press, 2000, 85 p.

12. Dukkipati R.V. and Amyot J.R. Computer-Aided Simulation in Railway Dynamics. New-York : Marcel-Dekker, 1988, 74 p.

13. Redchenko V.P. *Dynamichni vyprovuvannya mostiv. Chastyna 2: Vil'ni kolyvannya, modal'nyy kontrol'* [Dynamic tests of bridges. Part 2: Free vibrations, modal control]. Dnipro : Porogy Publ., 2017, 216 p. (in Ukrainian).

14. Yaroshenko D.S. and Guslysta A.E. *Neliniyni dynamichni modeli budivel', sporud i seredovyshch v matematychnomu paketi Mathcad* [Nonlinear dynamic models of constructions, installations and environments in mathematical package Mathcad]. *Stroitel'stvo. Materialovedenie. Mashinostroyeniye* [Construction, Materials Science, Mechanical Engineering]. 2017, vol. 101, pp. 235–239. (in Ukrainian).

Надійшла до редакції: 09.06.2020.