

МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА В СЛУЧАЕ НЕИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТА МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ

А. И. Рыжков, асс.

Ключевые слова: *нелинейные волны, композиционный материал, неидеальный контакт, метод осреднения, волновое уравнение, эффективные коэффициенты*

Введение. Нелинейные волны деформации играют важную роль в механике композиционных материалов. Генерация локализованных волн сопровождается значительным ростом их амплитуды. Это может приводить к возникновению зон пластичности и к развитию микротрещин. Таким образом, нелинейные динамические эффекты являются существенным фактором, влияющим на прочность и долговечность конструкций.

Нелинейные упругие модули твердых тел, как правило, весьма чувствительны к изменениям микроструктуры. Поэтому, регистрируя характеристики нелинейных волн, можно отслеживать очень тонкие изменения во внутреннем строении материала, которые нельзя выявить при помощи традиционных методов исследований. Это открывает возможности для разработки новых, более точных методов акустической диагностики и неразрушающего контроля.

Анализ публикаций. Нелинейные упругие волны в твердых телах исследовались многими авторами [1 – 3]. Как правило, основное внимание уделялось однородным материалам и конструкциям, в которых эффект дисперсии вызван геометрическими факторами. Влияние структурной дисперсии, вызванной неоднородностью внутреннего строения материала, изучено меньше.

Неоднородность материала можно моделировать путем введения дополнительных внутренних степеней свободы, когда каждая точка континуума наделяется свойствами твердого тела путем учета ее собственных поступательных и вращательных движений. Идея данного метода была предложена Э. Коссера, Ф. Коссера и Ж. Леру около 100 лет назад. На основании теории Коссера разработаны несколько континуальных моделей, учитывающих влияние микроструктуры на нелинейные динамические свойства композиционных материалов [4; 5].

С математической точки зрения описанные методы приводят к появлению в исходных волновых уравнениях дополнительных градиентных слагаемых, учитывающих эффект дисперсии. Следует отметить, что такой подход часто носит феноменологический характер, поскольку числовые значения коэффициентов при этих слагаемых не определены. В некоторых случаях их удается найти экспериментально, однако для многих реальных материалов точные значения феноменологических параметров остаются неизвестными.

Другой способ учесть влияние микроструктуры заключается в применении асимптотического метода осреднения. Изначально метод осреднения был разработан для определения квазистатических свойств неоднородных материалов и конструкций [6]. Впоследствии учет членов высшего порядка позволил моделировать эффект структурной дисперсии и получить макроскопические волновые уравнения, пригодные в длинноволновом случае [7; 8].

Цель статьи. Данная работа посвящена нахождению макроскопического волнового уравнения, описывающего распространение нелинейных упругих волн в волокнисто-армированном композиционном материале в случае неидеального контакта между компонентами. Для этой цели развит асимптотический метод осреднения высшего порядка.

Изложение материала. Рассмотрим однонаправленный волокнистый композит, состоящий из матрицы $\Omega^{(1)}$ и квадратной решетки цилиндрических включений $\Omega^{(2)}$ (рис. 1). Предположим, что физической и геометрической нелинейностью можно пренебречь, а нелинейные свойства модели в первую очередь обусловлены неидеальными условиями контакта на границе раздела компонентов.

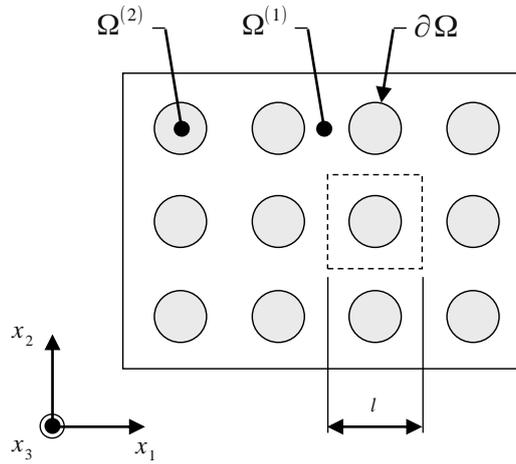


Рис. 1. Волокнистый композиционный материал

Будем исследовать распространение упругих волн в плоскости, перпендикулярной оси волокон. В этом случае компоненты напряженно-деформированного состояния зависят только от двух пространственных координат x_1, x_2 , а система уравнений движения распадается на две несвязанные задачи, описывающие распространение плоских и антиплоских волн. Ограничимся рассмотрением антиплоской поперечной волны сдвига.

Исходное волновое уравнение имеет вид:

$$\mu^{(n)} \left(\frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x_2^2} \right) = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где $\mu^{(n)}$ – модуль сдвига; $\rho^{(n)}$ – плотность; $u^{(n)}$ – перемещение в направлении x_3 . Здесь и ниже верхний индекс (n) обозначает различные компоненты материала, $n = 1, 2$

Рассмотрим модель неидеального контакта между волокнами и матрицей. Условия равновесия предполагают равенство касательных напряжений в компонентах на границе раздела $\partial\Omega$:

$$\sigma^* = \sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (2)$$

где $\sigma^{(n)} = \mu^{(n)} (\partial u^{(n)} / \partial \mathbf{n})$, $\partial / \partial \mathbf{n}$ – производная по нормали \mathbf{n} к границе $\partial\Omega$. Нарушение механической связи между волокнами и матрицей приводит к разрыву в поле перемещений. Один из наиболее распространенных подходов к моделированию неидеального контакта заключается в том, чтобы задать некоторую зависимость между скачком перемещений $\Delta u^* = u^{(1)} - u^{(2)}$ и напряжением σ^* на границе раздела:

$$\Delta u^* = f(\sigma^*) \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (3)$$

где $f(\sigma^*)$ – функция адгезии.

Если зависимость (3) не слишком сильно отличается от линейной, ее можно представить в виде асимптотического разложения:

$$\sigma^* = \mu_1^* \frac{\Delta u^*}{h} + \mu_3^* \left(\frac{\Delta u^*}{h} \right)^3 + O \left[\left(\frac{\Delta u^*}{h} \right)^5 \right] \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (4)$$

где h – толщина границы раздела между компонентами. Сдвиговая деформация обладает свойством симметрии, поэтому в данном случае функция адгезии является нечетной, $f(\sigma^*) = -f(-\sigma^*)$, а в разложение (3.4) входят только нечетные степени величины $\Delta u^* / h$.

Коэффициенты μ_1^*, μ_3^* имеют физический смысл линейной и нелинейной сдвиговой жесткости границы раздела соответственно. Обращая ряд (4), запишем:

$$\frac{\Delta u^*}{h} = \frac{\sigma^*}{\mu_1^*} - \frac{\mu_3^*}{\mu_1^*} \left(\frac{\sigma^*}{\mu_1^*} \right)^3 + O \left[\left(\frac{\sigma^*}{\mu_1^*} \right)^5 \right] \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (5)$$

Для моделирования эффекта неидеального контакта введем безразмерные параметры адгезии:

$$\alpha = \frac{h\mu^{(1)}}{l\mu_1^*}, \quad \beta = \frac{\mu_3^*}{\mu_1^*} \left(\frac{\mu^{(1)}}{\mu_1^*} \right)^2,$$

где l – размер ячейки периодичности композиционного материала. Устремим толщину и жесткость границы к нулю: $h \rightarrow 0$, $\mu_1^* \rightarrow 0$, $\mu_3^* \rightarrow 0$. Тогда в асимптотическом пределе в зависимости от значений параметров α и β возможно учесть различную степень адгезии между компонентами. Выражение (5) запишется в виде:

$$u^{(1)} - u^{(2)} = \alpha l \frac{\sigma^*}{\mu^{(1)}} - \alpha \beta l \left(\frac{\sigma^*}{\mu^{(1)}} \right)^3 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (6)$$

Значение $\alpha = 0$ соответствует идеальному контакту, $\alpha \rightarrow \infty$ – полному отсутствию контакта между волокнами и матрицей. При $\beta = 0$ упругие свойства границы раздела являются линейными, а с увеличением β усиливается влияние нелинейности. В случае $\beta < 0$ нелинейность является мягкой, а в случае $\beta > 0$ – жесткой.

В инженерной практике эффект неидеального контакта может быть вызван различными причинами: как дефектами на стадии изготовления материала, так и повреждениями границы раздела в процессе эксплуатации конструкции. Кроме того, возможны случаи, когда адгезия между включениями и матрицей уменьшается намеренно, чтобы снизить локальные концентрации напряжений. Следует отметить, что предложенная модель неидеального контакта не зависит от физических причин, вызвавших нарушение связи между компонентами, и поэтому может использоваться для описания широкого круга задач.

Перейдем к безразмерным переменным $\bar{u} = u/U$, $\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/L$, $\bar{x}_k = x_k/L$, $k=1,2$, где L – длина волны. Краевая задача (1), (2), (6) запишется в виде:

$$\mu^{(n)} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}^{(n)}}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}^{(n)}}{\partial \bar{x}_2^2} \right) = \rho^{(n)} L^2 \frac{\partial^2 \bar{u}^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (7)$$

$$\mu^{(1)} \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial \bar{\mathbf{n}}} = \mu^{(2)} \frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial \bar{\mathbf{n}}} \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (8)$$

$$\bar{u}^{(1)} - \bar{u}^{(2)} = \alpha \eta \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial \bar{\mathbf{n}}} - \alpha \eta \delta \left(\frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial \bar{\mathbf{n}}} \right)^3 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (9)$$

где $\eta = l/L$, $\delta = \beta (U/L)^2$ – малые параметры.

Для нахождения макроскопического волнового уравнения используем асимптотический метод осреднения. Введем «медленные» $\bar{x}_k = \bar{x}_k$ и «быстрые» $y_k = \eta^{-1} \bar{x}_k$ координаты. Решение представим в виде асимптотического разложения:

$$\bar{u}^{(n)} = u_0(\bar{x}_k) + \eta u_1^{(n)}(\bar{x}_k, y_k) + \eta^2 u_2^{(n)}(\bar{x}_k, y_k) + \dots, \quad (10)$$

где первый член u_0 представляет собой осредненную часть решения; он медленно изменяется на макроуровне и не зависит от «быстрых» координат. Следующие члены $u_i^{(n)}$, $i=1,2,3,\dots$, вносят поправки порядка η^i и описывают локальные осцилляции решения на микроуровне.

В силу периодичности микроструктуры композиционного материала функции $u_i^{(n)}$ также удовлетворяют условию периодичности:

$$u_i^{(n)}(\bar{x}_k, y_k) = u_i^{(n)}(\bar{x}_k, y_k \pm 1), \quad i=1,2,3,\dots \quad (11)$$

Расщепляя краевую задачу (7 – 9) по параметру η , получим рекуррентную последовательность нелинейных краевых задач на ячейке:

$$\mu^{(n)} \left(\frac{\partial^2 u_{i-2}^{(n)}}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 u_{i-2}^{(n)}}{\partial \bar{x}_2^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{i-1}^{(n)}}{\partial \bar{x}_1 \partial y_1} + 2 \frac{\partial^2 u_{i-1}^{(n)}}{\partial \bar{x}_2 \partial y_2} + \frac{\partial^2 u_i^{(n)}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u_i^{(n)}}{\partial y_2^2} \right) = \rho^{(n)} L^2 \frac{\partial^2 u_{i-2}^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (12)$$

$$\mu^{(1)} \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(1)}}{\partial \bar{\mathbf{n}}} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \bar{\mathbf{m}}} \right) = \mu^{(2)} \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(2)}}{\partial \bar{\mathbf{n}}} + \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial \bar{\mathbf{m}}} \right) \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (13)$$

$$u^{(1)} - u^{(2)} = \alpha \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(1)}}{\partial \bar{\mathbf{n}}} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \bar{\mathbf{m}}} \right) - \alpha \delta \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(1)}}{\partial \bar{\mathbf{n}}} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \bar{\mathbf{m}}} \right)^3 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (14)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots$, $u_{-1}^{(n)} = 0$, $\partial / \partial \bar{\mathbf{m}}$ – производная по нормали к $\partial\Omega$, записанная в «быстрых» координатах.

Условия периодичности (11) можно заменить условиями нулевого среднего по периоду [6]:

$$\iint_{\Omega_0^{(1)}} u_i^{(1)} dy_1 dy_2 + \iint_{\Omega_0^{(2)}} u_i^{(2)} dy_1 dy_2 = 0, \quad (15)$$

где $\Omega_0^{(1)}$, $\Omega_0^{(2)}$ – область матрицы и волокна в пределах ячейки периодичности соответственно.

Краевые задачи (12 – 15) рассматриваются в пределах одной выделенной ячейки периодичности композиционного материала (рис. 2). В «быстрых» координатах размер ячейки равен единице, а радиус волокна составляет $\sqrt{c^{(2)}/\pi}$, где $c^{(2)}$ – объемная доля волокон, $0 \leq c^{(2)} \leq \pi/4$.

Для нахождения приближенного аналитического решения, заменим внешнюю квадратную границу ячейки окружностью такой же площади (рис. 3). Физический смысл данного упрощения заключается в том, что мы пренебрегаем видом пространственной упаковки волокон. Точность полученного результата будет тем выше, чем меньше объемная доля волокон. Отметим, что такое приближение широко используется в теории композитов для вычисления статических эффективных упругих модулей [9] и обеспечивает высокую точность результатов при $c^{(2)} < 0.5$, в то время как для большинства композиционных материалов, используемых в современной технике, объемная доля волокон составляет $c^{(2)} = 0.3 \dots 0.4$.

Решение нелинейных задач на ячейке представим в виде асимптотического разложения:

$$u_i^{(n)} = u_{i0}^{(n)} + \delta u_{i1}^{(n)} + O(\delta^2). \quad (16)$$

Коэффициенты ряда (16) были найдены в явном аналитическом виде с использованием математического программного пакета «Maple».

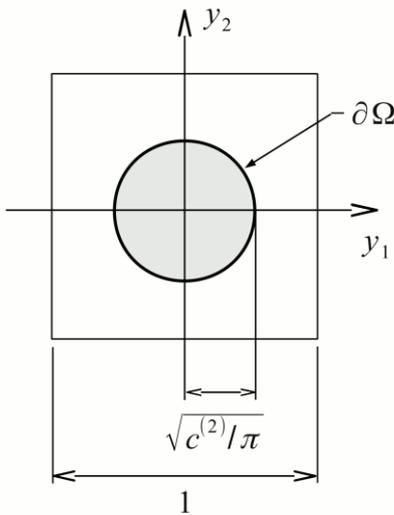


Рис. 2. Ячейка периодичности волокнистого композиционного материала

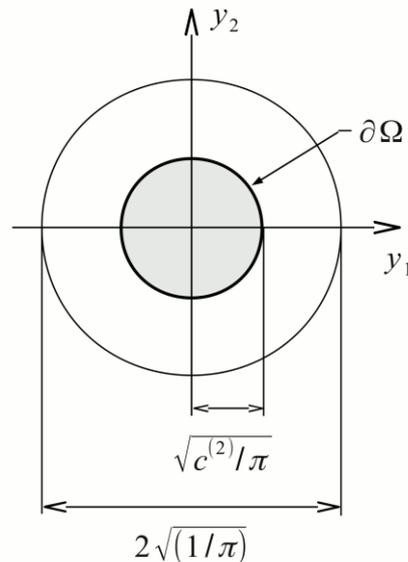


Рис. 3. Упрощение геометрической формы ячейки периодичности

Применим к уравнению (12) при $i = 4$ оператор осреднения $\iint (\cdot) r dr d\theta$ по области ячейки периодичности. Члены $u_4^{(n)}$ можно исключить на основании теоремы Гаусса-Остроградского с учетом условий (11), (13). В результате получим макроскопическое нелинейное волновое уравнение:

$$\begin{aligned} \mu_1 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}_2^2} \right) + \delta \mu_2 \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}_1^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}_1} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}_1^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}_2} \right)^2 + \frac{4}{3} \frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}_1 \partial \bar{x}_2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}_2^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}_1} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}_2^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}_2} \right)^2 \right] + \eta^2 \mu_3 \left(\frac{\partial^4 u_0}{\partial \bar{x}_1^4} + \frac{\partial^4 u_0}{\partial \bar{x}_2^4} \right) + O(\delta^2) + O(\delta \eta^2) + O(\eta^4) = \rho L^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Переходя к размерным переменным $u = u_0 U$, $x_k = \bar{x}_k L$, запишем уравнение (17) в виде:

$$\begin{aligned} \mu_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + \beta \mu_2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \eta^2 L^2 \mu_3 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

где μ_1 , μ_2 , μ_3 – эффективные упругие коэффициенты. Коэффициент μ_1 имеет физический смысл линейного модуля сдвига, в то время как коэффициенты μ_2 и μ_3 характеризуют интенсивность эффектов нелинейности и дисперсии соответственно.

Для эффективных коэффициентов μ_1 и μ_2 были получены явные аналитические выражения, а значения эффективного коэффициента μ_3 определялись путем численного интегрирования по области ячейки периодичности. Для этого использовались стандартные процедуры пакета «Maple».

В качестве примера рассмотрим композиционный материал, состоящий из алюминиевой матрицы ($\mu^{(1)} = 27.9$ ГПа, $\rho^{(1)} = 2700$ кг/м³) и никелевых волокон ($\mu^{(2)} = 75.4$ ГПа, $\rho^{(2)} = 8940$ кг/м³). На рисунках 4 – 6 приведены результаты для эффективных упругих коэффициентов μ_1 , μ_2 , μ_3 при различных значениях объемной доли волокон $c^{(2)}$ и параметра адгезии α . На рисунке 4 полученное решение сравнивается с данными работы [10] в случае идеального контакта ($\alpha = 0$, кружки) и в случае материала с пустотными включениями ($\mu^{(2)} = 0$, штриховая линия).

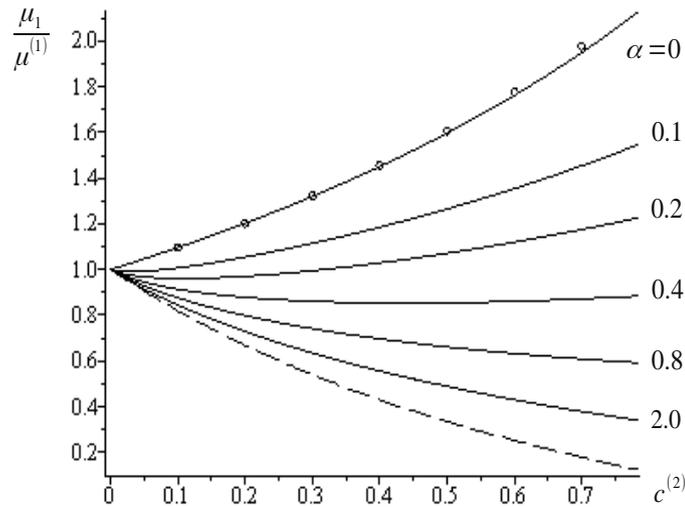


Рис. 4. Эффективный линейный модуль сдвига μ_1

Эффективные модули жесткости μ_1 , μ_3 принимают максимальные значения при идеальном контакте компонентов ($\alpha = 0$). Ослабление связи между волокнами и матрицей (увеличение параметра α) приводит к уменьшению значений μ_1 и μ_3 .

Эффективный коэффициент μ_2 равен нулю при $\alpha = 0$. Это значит, что в случае идеального контакта поведение материала является линейным. В диапазоне $\alpha = 0.05 \dots 0.1$ наблюдается резкое увеличение μ_2 , при этом влияние нелинейности достигает максимума. Дальнейшее ослабление связи между компонентами сопровождается уменьшением коэффициента μ_2 и снижением интенсивности нелинейных эффектов.

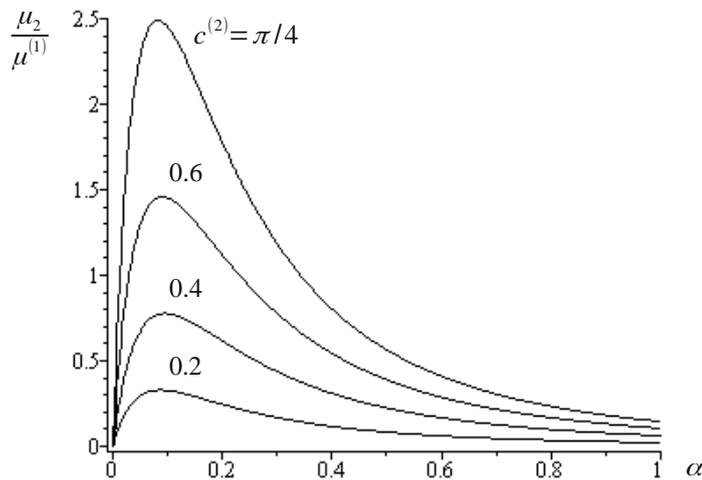


Рис. 5. Эффективный упругий коэффициент μ_2

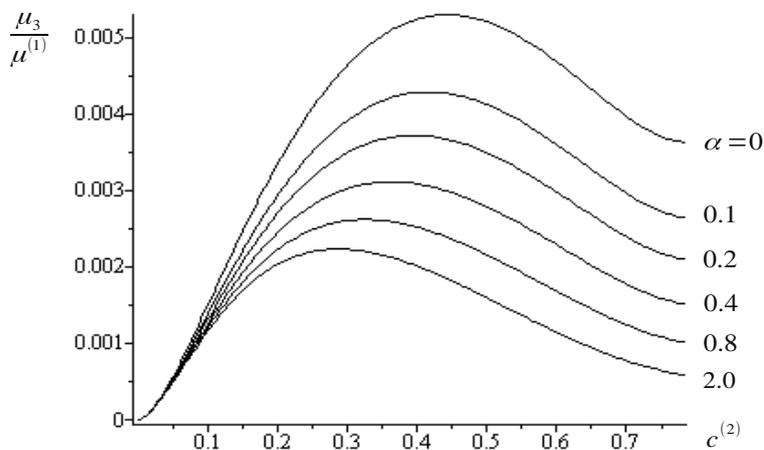


Рис. 6. Эффективный упругий коэффициент μ_3

Увеличение объемной доли включений $c^{(2)}$ (при постоянном α) приводит к росту эффективного коэффициента μ_2 . Это можно объяснить тем, что в данной задаче нелинейное поведение материала обусловлено именно свойствами границы раздела $\partial\Omega$. Поэтому с увеличением площади $\partial\Omega$ влияние нелинейности также увеличивается.

Эффективный модуль μ_3 характеризует интенсивность эффекта дисперсии. При $c^{(2)} = 0$ материал является однородным и дисперсия отсутствует, $\mu_3 = 0$. При средних значениях объемной доли волокон $c^{(2)} = 0.25 \dots 0.45$ неоднородность внутреннего строения композита проявляется наиболее сильно, а коэффициент μ_3 достигает максимума.

Выводы. В работе получено макроскопическое волновое уравнение, описывающее распространение нелинейных волн деформации в волокнистом композиционном материале в случае неидеального контакта между компонентами. Для этой цели развит асимптотический метод осреднения высшего порядка. Рассмотрены антиплоские поперечные волны сдвига, распространяющиеся в направлении, перпендикулярном оси волокон. Найдены эффективные упругие коэффициенты и выполнен анализ полученных численных результатов.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Samsonov A. M.** Strain solitons in solids and how to construct them. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001. – 230 p.
2. **Островский Л. А., Потапов А. И.** Введение в теорию модулированных волн. – М. : Физматлит, 2003. – 400 с.
3. **Порубов А. В.** Локализация нелинейных волн деформации. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 208 с.
4. **Engelbrecht J., Braun M.** Nonlinear waves in nonlocal media // *Appl. Mech. Rev.* – 1998. – V. 51. – P. 475 – 487.
5. **Ерофеев В. И.** Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М. : Изд. Моск. ун-та, 1999. – 328 с.
6. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. – М. : Наука, 1984. – 352 с.
7. **Andrianov I. V., Bolshakov V. I., Danishevs'kiy V. V., Weichert D.** Higher order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite structures // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 2008. – V. 464. – P. 1181 – 1201.
8. **Большаков В. И., Андрианов И. В., Данишевский В. В.** Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. – Д. : Пороги, 2008. – 196 с.
9. **Кристensen Р. М.** Введение в механику композитов. – М. : Мир, 1982. – 334 с.
10. **Perrins W. T., McKenzie D. R., McPhedran R. C.** Transport properties of regular arrays of cylinders // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 1979. – V. 369. – P. 207 – 225.

SUMMARY

Problem statement. Nonlinear strain wave play an important role in the mechanics of composites. Generation of localized waves accompanied by a significant increase in their amplitude. This may lead to areas of plasticity and development of microcracks. Thus, nonlinear dynamic effects are a significant factor affecting the strength and durability of structures.

Nonlinear elastic moduli of solids, are very sensitive to changes in the microstructure. Recording characteristics of nonlinear waves can be tracked very subtle changes in the internal structure of the material, which can not be detected using traditional research methods.

Analyzing of the resent research. Analyzing of the resent research. Nonlinear elastic waves in solids studied by many authors usually focused on homogeneous materials and structures, in which the effect of the dispersion part of geometrical factors. The impact of the dispersion due to heterogeneity of the internal structure of the material has been studied less.

Research objective. The aim of this work is devoted to finding the macroscopic wave equation describing the propagation of nonlinear elastic waves in fiber-reinforced composite materials in the case of non-ideal contact between the components. For this purpose, developed asymptotic method of averaging the highest order.

Conclusions. In this paper a macroscopic wave equation describing the propagation of nonlinear strain waves in fiber composite in the case of non-ideal contact between the components was obtained. For this purpose, asymptotic method of higher order mode was developed. Antiplanar shear wave, propagating in a direction perpendicular to the axis of the fibers were observed. The effective elastic coefficients and the analysis of the numerical results obtained.

REFERENCES

1. Samsonov A. M. Strain solitons in solids and how to construct them. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001. – 230 p.

2. Ostrovskij L. A., Potapov A. I. Vvedenie v teoriju modulirovannyh voln. – M. : Fizmatlit, 2003. – 400 c.
3. Porubov A. V. Lokalizacija nelinejnyh voln deformacii. – M. : FIZMATLIT, 2009. – 208 s.
4. Engelbrecht J., Braun M. Nonlinear waves in nonlocal media // Appl. Mech. Rev. – 1998. – V. 51. – P. 475 – 487.
5. Erofeev V. I. Volnovye processy v tverdyh telah s mikrostrukturoj. – M. : Izd. Mosk. un-ta, 1999. – 328 s.
6. Bahvalov N. S., Panasenko G. P. Osrednenie processov v periodicheskikh sredah. – M. : Nauka, 1984. – 352 c.
7. Andrianov I. V., Bolshakov V. I., Danishevskij V. V., Weichert D. Higher order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite structures // Proc. R. Soc. Lond. A. – 2008. – V. 464. – P. 1181 – 1201.
8. Bol'shakov V. I., Andrianov I. V., Danishevskij V. V. Asimptoticheskie metody rascheta kompozitnyh materialov s uchetom vnutrennej struktury. – D. : Porogi, 2008. – 196 s.
9. Kristensen R. M. Vvedenie v mehaniku kompozitov. – M. : Mir, 1982. – 334 s.
10. Perrins W. T., McKenzie D. R., McPhedran R. C. Transport properties of regular arrays of cylinders // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1979. – V. 369. – P. 207 – 225.

УДК 539.3

Макроскопическое нелинейное волновое уравнение для волокнистого композиционного материала в случае неидеального контакта между компонентами / А. И. Рыжков // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. – Д. : ПГАСА, 2014. – № 2. – С. 43 – 50. – Библиогр.: (10 назв.).

Получено макроскопическое волновое уравнение, описывающее распространение нелинейных волн деформации в волокнистом композиционном материале в случае неидеального контакта между компонентами. Для этой цели развит асимптотический метод осреднения высшего порядка. Найлены эффективные упругие коэффициенты и выполнен анализ полученных численных результатов.

Ключевые слова: нелинейные волны, композиционный материал, неидеальный контакт, метод осреднения, волновое уравнение, эффективные коэффициенты.

Макроскопічне нелінійне хвильове рівняння для волокнисто-армованого композиційного матеріалу у випадку неідеального контакту між компонентами / О. І. Рижков // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. – Д. : ПГАСА, 2014. – № 2. – С. 43 – 50. – Бібліогр.: (10 назв.).

Одержано макроскопічне хвильове рівняння, що описує поширення нелінійних хвиль деформації у волокнисто-армованому композиційному матеріалі у випадку неідеального контакту між компонентами. Для цього розвинуто асимптотичний метод осереднення вищого порядку. Знайдено ефективні пружні коефіцієнти та виконано аналіз одержаних чисельних результатів.

Ключові слова: нелінійні хвилі, композиційний матеріал, неідеальний контакт, метод осереднення, хвильове рівняння, ефективні коефіцієнти.

Macroscopic nonlinear wave equation for a fibre-reinforced composite material in a case of imperfect bonding between the components / O. Ryzhkov // Visnyk of Pridneprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture. – D. : PSACEA, 2014. – № 2. – P. 43 – 50. – Bibliogr.: (10 names).

The macroscopic wave equation describing the propagation of nonlinear strain waves in a fibre-reinforced composite material with an imperfect bonding between the components is obtained. For this aim, the higher-order asymptotic homogenization method is developed. Effective elastic coefficients are evaluated and the analysis of the obtained numerical results is presented.

Key words: nonlinear waves, composite material, imperfect bonding, homogenization method, wave equation, effective coefficients.