економічний ефект за рахунок скорочення строків твердіння матеріалу конструкцій та дострокового введення в експлуатацію будівлі, що зводиться, складає 182,985 тис. грн, від скорочення умовних постійних накладних витрат при зведенні монолітного каркасу 9-поверхової будівлі, яка складає 188,47 тис. грн (52,16 грн/м^3).

ВИКОРИСТАНІ ДЖЕРЕЛА

1. **Алкснис Ф. Ф.** Твердение и деструкция гипсоцементных композиционных материалов / Фрицис Фрицевич Алкснис – Л. : Стройиздат, 1988. – 103 с.

2. **Баженов Ю. М.** Высокопрочный мелкозернистый бетон для армоцементных конструкций / Юрий Михайлович Баженов – М. : Госстройиздат, 1963. – 128 с.

3. **Батраков В. Г.** Модифицированные бетоны / Владимир Григорьевич Батраков. – М. : Стройиздат, 1990. – 400 с.

4. К оценке совместимости химических добавок с цементами в технологии бетона / Ушеров-Маршак А. В., Златковский О. А. и др. // Строительные материалы и изделия, 2003. – № 4. – С. 11 – 15.

5. **Менделеева И. Н.** Сухие смеси на основе смешанных цементов [Электронный ресурс] – Систем. вимоги: Pentium ; 32 Mb RAM ; Windows 95, 98, 2000, XP ; MS Word 97-2000. – Режим доступа к статье. : http://www.spsss.ru/confer/doclad08/medvedeva.doc

6. **Мешков П. И.** Способы оптимизации составов сухих строительных смесей / Мешков П. И., Мокин В. А. // Строительные материалы. – 2000. – № 5. – С. 12 – 14.

7. **Мчедлов-Петросян О. П.** Расширяющиеся составы на основе портландцемента (химия и технология) / О. П. Мчедлов-Петросян, Л. Г. Филатов. – М. : Изд-во лит. по строительству, 1965. – 140 с.

8. **Песцов В. И.** Современное состояние и перспективы развития производства сухих строительных смесей в России / В. И. Песцов, Э. Л. Большаков // Строительные материалы, 1999. – № 3. – С. 3 – 5.

9. Рекомендованные рецептуры приготовления сухих смесей. ООО «Спец-контракт» [Электронный ресурс] — по данным ООО «Спец-контракт» – К. , 2000 – Систем. вимоги: Pentium ; 32 Mb RAM ; Windows 95, 98, 2000, XP ; MS Word 97-2000.

10. **Рояк С. М.** Специальные цементы / С. М. Рояк, Г. С. Рояк – М. : Стройиздат, 1983. – 279 с.

11. **Саницький М. А.** Модифіковані цементи для бетонів та будівельних розчинів / Саницький М. А., Марущак У. Д., Шевчук Г. Я. [та ін.] // Зб. наук. праць : Будівельні конструкції. – 2002. – № 56. – С. 378 – 385.

12. **Савицкий Н. В.** Ускорение процесса твердения портландцемента вяжущими эттрингитового типа / Н. В. Савицкий, О. А. Ожищенко // Проблемы современного бетона и железобетона. – 2011. – № 74, кн. 2. – С. 84 – 89.

13. Современные методы оптимизации композиционных материалов / [Вознесенский В. А., Выровой В. Н., Керш В. Я. и др.]. – К. : Будівельник, 1983. – 144 с.

14. Суміші будівельні сухі модифіковані Загальні технічні умови : ДСТУ-П Б В.2.7-126:2006. – [Чинний від 2006-04-27]. – К. : Міністерство будівництва, архітектури та житлово-комунального господарства України, 2006. – 33 с. – Національний стандарт України.

15. **Lamberet S.** Durability of ternary binders based on portland cement, calcium aluminate cement and calcium sulfate. Thèse de doctorat de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne / Lamberet Severine. – EPFL., 2005. – 186 c.

УДК 69.06:658.012.2

СЕЛЕКТОНОВАЦІЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ У РЕАЛІЗАЦІЇ СКЛАДНИХ БУДІВЕЛЬНИХ ПРОЕКТІВ

І. Д. Павлов, д. т. н., проф., Ф. І. Павлов, к. т. н., доц., М. О. Каплуновська,* к. т. н.*
** Запорізька державна інженерна академія*

Ключові слова: *селектоновація рішень, оптимальне управлінське рішення, сітьова модель, економіко-математична модель, складний будівельний проект*

Постановка проблеми. Виконання складного будівельного проекту в визначений термін завжди пов'язане з можливістю використання і наявністю ресурсів (трудових, матеріальнотехнічних, фінансових, інформаційних та ін.) і вимагає врахування специфіки проекту та численних умов його реалізації.

Аналіз проблеми. Реалізація складних проектів у зазначений термін приваблює багатьох дослідників. Процедура передбачення результату є актуальною, бо ступінь надійності та ризик управлінських рішень безпосередньо впливає на ефективність виробництва. Незважаючи на значні успіхи у вирішенні питань управління складними проектами, існує широкий комплекс проблем щодо удосконалення методів і підходів в управлінні організаційно-технологічною підготовкою складними будівельними проектами.

Мета статті. Дослідження проблеми обґрунтування термінів реалізації складних будівельних проектів з урахуванням специфіки проектів та умов їх реалізації за допомогою методів теорії графів та потокових алгоритмів.

Основний матеріал. У практичній роботі, а також у наукових дослідженнях завжди доводиться стикатися із проблемою обґрунтування термінів виконання проектів або виробничих програм. Оскільки технології та організації виробництва завжди притаманні багатоваріантність і багатокритеріальність, то вирішення питання здійснюватимемо на основі наукового підходу, використання сучасного арсеналу теорії дослідження операцій та засобів обчислювальної техніки [1; 4].

Будь-який проект охоплює впорядковану кінцеву безліч операцій. Режим виконання їх завжди характеризується як тривалістю t_{ij}, так і інтенсивністю виробництва n_{ij}, що пов'язано із залученням трудових ресурсів в одиницю часу.

Для мінімізації залучення ресурсів та дотримання термінів реалізації проекту слід складові операції $(i, j) \in A$ виконувати з певною швидкістю, узгодженою з кінцевою швидкістю, заданою терміном реалізації проекту. Розв’яжемо цю задачу при великій кількості і обсягах робіт, тобто у складних проектах.

Розглянемо граф G (U, A), де U – множина вузлів (подій) графа, A – безліч операцій (дуг, робіт) $(i, j) \in A$. Кожна операція характеризується тривалістю реалізації – t_{ij} та інтенсивністю – $n_{ij}\, (i, j) \in A$ [2; 4].

Має місце залежність $t_{ij} \cdot n_{ij} = Q_{ij}$, де Q_{ij} – трудомісткість роботи $(i, j) \in A$, яка залежить від обсягу (i = 1, 2,..., $n – 1$; j = 2, 3, ..., n), n – кількість вузлів (подій) в моделі.

За кожною роботою $(i, j) \in A$ відома мінімальна інтенсивність – n_{ij}^{D}, якій відповідає тривалість D_{ij} і d_{ij} – тривалість, що відповідає прискореній (максимальній) концентрації використання ресурсів n_{ij}^{d} (рис. 1).

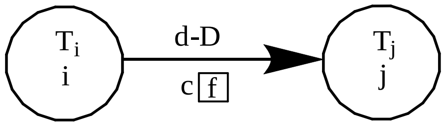

Рис. 1. Елемент сітьової моделі

Сформулюємо математичну модель задачі.

Дана модель (D_{ij}, T^{D}), по $(i, j) \in A$ відомо d_{ij}, C_{ij}. Де C_{ij} – «вартість» скорочення роботи на одиницю часу.

Скорочення тривалості виконання робіт $(i, j) \in A$ на величину $\Delta x_{ij} = D_{ij} - x_{ij}$ може бути забезпечене залученням додаткових ресурсів, тобто за рахунок збільшення інтенсивності виробництва $\Delta n_{ij} = c_{ij} \cdot \Delta x_{ij}$.

Потрібно визначити роботи $(i, j) \in A$, які необхідно прискорити, а також роботи, для яких необхідно зберегти нормальну тривалість D_{ij}. Іншими словами, потрібно знайти таке рішення *(*X_{ij}, T_n*)*, яке мінімізує цільову функцію [1; 4; 5]:

$$L(x) = \sum_{(i,j)\in A} \Delta n_{ij} = \sum_{(i,j)\in A} C_{ij} \cdot (D_{ij} - x_{ij}) \to \min \tag{1}$$

Множину вузлів (подій) можна визначити як U = (1, 2,..., n), де вузол 1 (n = 1) позначає початок реалізації проекту, а вузол n – закінчення.

Обмеження у розв’язанні задачі такі:

$$T_i - T_j + x_{ij} \le 0 \text{ для всіх } (i, j) \in A, \tag{2}$$

$$-T_1 + T_n \le T_з \tag{3}$$

$$x_{ij} \le D_{ij}, \text{ для всіх } (i, j) \in A, \tag{4}$$

$$-x_{ij} \le -d_{ij}, \text{ для всіх } (i, j) \in A, \tag{5}$$

де T_i (T_j) – ранній термін звершення подій реалізації проекту,

$T_з$ – заданий термін на будівництво об'єкта (реалізації проекту).

Умова (2) відображає нерозривність сіті та $T_j = \max(T_i + t_{ij})$.

Умова (3) встановлює вимогу неперевищення заданого терміну будівництва, а обмеження (4) та (5) визначаються технологією і організацією виробництва всіх операцій $(i, j) \in A$.

Вид цільової функції (1) і обмеження мають лінійну залежність, тому сформульована задача є задачею лінійного програмування. Для її розв’язання необхідно перевірити розв’язання при встановленому $T_з$. Для цього вважаємо $x_{ij} = d_{ij}$ і визначаємо T^d за алгоритмом розрахунку моделі, потім $X_{ij} = D_{ij} \to T^D$ та $T^d \le T_з \le T^D$.

Обчислення для кожного значення T_n з сегмента $[T^d \div T^D]$ мінімуму функції $L(x) = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}(D_{ij} - x_{ij}) = \left(\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}D_{ij} - \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}\right) \to min$, за умов (2) ÷ (5) являє собою параметричну задачу лінійного програмування. Наведена економіко-математична модель (ЕММ) еквівалентна наведеній нижче задачі лінійного програмування з максимізацією функції мети.

Враховуючи, що в (1) $\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} \cdot D_{ij} = const$, замінимо цільову функцію вихідної задачі на іншу функцію:

$$L(x) = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} \cdot x_{ij} \to max, \tag{6}$$

при обмеженнях:

$$T_i - T_j + x_{ij} \le 0, (i, j) \in A, \tag{7}$$

$$-T_{i1} + T_n \le T_з, \tag{8}$$

$$+x_{ij} \le D_{ij}, \quad (i, j) \in A, \tag{9}$$

$$-x_{ij} \le -d_{ij}, (i, j) \in A, \tag{10}$$

У постановці (6) ÷ (10) задача може бути розв’язана універсальним симплекс-методом, який використовується для розв’язання екстремальних задач лінійного програмування. Такі методи громіздкі і їх застосування доцільне тільки тоді, коли спеціальні методи виявляються недостатніми. Нижче наведемо методику приведення такої задачі до канонічного (стандартного) виду.

Ми пропонуємо більш ефективний підхід, заснований на теорії двоїстості лінійного програмування в умовах доповнювальної нежорсткості.

У постановці (6) ÷ (10) задача має вигляд, аналогічний задачі мінімальної вартості проекту, тобто визначення оптимального потоку мінімальної вартості, а також володіє значною перевагою в обчислюваннях, має економічне і фізичне тлумачення, що дуже важливо в практичному застосуванні.

Досліджується задача, для якої у відповідність обмежень (7) ÷ (10) ставляться невід'ємні змінні f_{ij}, V, γ_{ij}, δ_{ij}, які називаються двоїстими. Вони наведені (перераховані) в такому ж порядку, в якому вводилися обмеження в модель.

Двоїста задача (6) ÷ (10) формулюється таким чином. Необхідно мінімізувати цільову функцію:

$$L(f) = \left(T \cdot V + \sum_{(i,j)\in A} D_{ij} \cdot \gamma_{ij} - \sum_{(i,j)\in A} d_{ij} \cdot \delta_{ij}\right) \to min \tag{11}$$

за умови, що

$$f_{ij} + \gamma_{ij} - \delta_{ij} = c_{ij} \qquad \text{для } (i, j) \in A, \tag{12}$$

$$\sum_j f_{ij} - V = 0 \qquad i=1, \tag{13}$$

$$\sum_i (f_{ij} - f_{ji}) = 0 \quad \text{для всіх } i = 2,....,n-1, \tag{14}$$

$$-\sum_i f_{in} + V = 0 \quad i=n, \tag{15}$$

$$f_{ij}, \gamma_{ij}, \delta_{ij} \geq 0 \qquad \text{для всіх } (i, j) \in A. \tag{16}$$

Двоїста задача (11) ÷ (16) сформульована відповідно з правилами теорії лінійного програмування.

На основі математичної структури двоїсті змінні f_{ij}, відповідні x_{ij} в прямій задачі, розглядаються як потоки в сіті з обмеженою пропускною здатністю. Умови (13) ÷ (15) відповідають обмеженням потоку для початкової, проміжних і кінцевої подій відповідно.

Двоїсті змінні γ_{ij}, δ_{ij} не можуть бути одночасно позитивними, тому що $D_{ij} \neq d_{ij}$. В обмеженні (12) значення γ_{ij} і δ_{ij} обчислюються $\gamma_{ij} = c_{ij} - f_{ij}$, при $\delta_{ij} = 0$; $\delta_{ij} = f_{ij} - c_{ij}$, при $\gamma_{ij} = 0$. Тому $\gamma_{ij} = \max(0, c_{ij} - f_{ij})$, при $\delta_{ij} = 0$; $\delta_{ij} = \max(0, f_{ij} - c_{ij})$, при $\gamma_{ij} = 0$.

На основі потокового алгоритму послідовно визначаються f_{ij} та $T_i(T_j)$, які задовольняють умовам:

1) $0 < f_{ij} < c_{ij}$, $\quad a^{/}_{ij} = 0$;

2) $f_{ij} = c_{ij}$, $\quad \bar{x}_{ij} = 0$;

3) $c_{ij} < f_{ij} < \infty$, $\quad a^{//}_{ij} = 0$;

де $a^{/}_{ij} = T_i - T_j + D_{ij}$ – резерв критичності,

$a^{//}_{ij} = T_i - T_j + d_{ij}$ – резерв скорочення,

$\bar{x}_{ij} = T_i - T_j + x_{ij}$, а невідомі змінні $x_{ij} = min(D_{ij}, T_j - T_i)$.

Розглянемо приклад № 1. Сформулюємо вихідний варіант при $T^D = 21$ міс., $T^d = 11$ міс., $T_з = 16$ міс. (рис. 2). Розв'язання задачі виконано послідовно за п'ятьма ітераціями, в результаті чого отримано та проаналізовано оптимальний варіант (рис. 3, табл. 1).

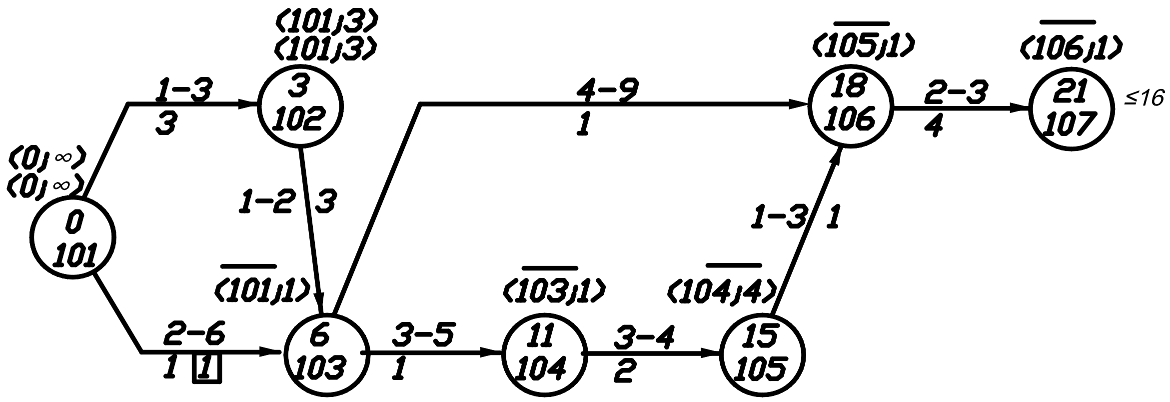

Рис. 2. Модель з початковими вихідними даними (ітерація – 1)

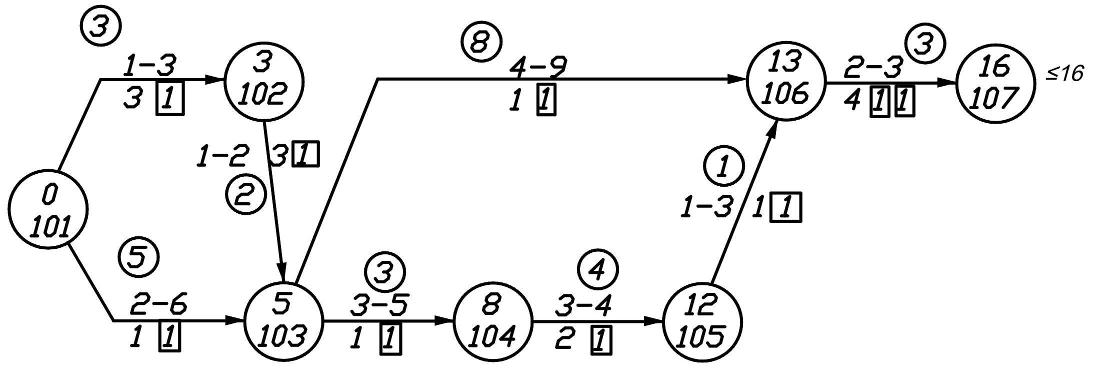

Рис. 3. Оптимальний варіант розв'язання задачі

Т а б л и ц я 1

Аналіз оптимального розв'язання задачі

№ п/п	$(i-j)$	d_{ij}	D_{ij}	c_{ij}	f_{ij}	x_{ij}	$c_{ij}x_{ij}$	$c_{ij}d_{ij}$	$c_{ij}D_{ij}$	γ_{ij}	δ_{ij}	$\gamma_{ij}D_{ij}$	$d_{ij}\delta_{ij}$
1	1 – 2	1	3	3	1	3	9	3	9	2	–	6	–
2	1 – 3	2	6	1	1	5	5	2	6	–	–	–	–
3	2 – 3	1	2	3	1	2	6	3	6	2	–	4	–
4	3 – 4	3	5	1	1	3	3	3	5	–	–	–	–
5	3 – 6	4	9	1	1	8	8	4	9	–	–	–	–
6	4 – 5	3	4	2	1	4	8	6	8	1	1	4	–
7	5 – 6	1	3	1	1	1	1	1	3	–	–	–	–
8	6 – 7	2	3	4	2	3	12	8	12	2	–	6	–
							∑52	∑30	∑58			∑20	–

$$Z(f) = T \cdot V + \sum_{(i,j)\in A} D_{ij} \cdot \gamma_{ij} - \sum_{(i,j)\in A} d_{ij} \cdot \delta_{ij} = 16 \cdot 2 + 20 - 0 = 52 \text{ од. рес.}$$

$$L(x) = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} \cdot x_{ij} = 52 \quad \text{од. рес.}$$

Таким чином, отримали, що $L(x)=Z(f)$.

Залучення ресурсів в оптимальному варіанті:

$$\sum_{(i,j)\in A} Дп^{x}{}_{ij} = \sum_{(i,j)\in A} D_{ij} \cdot c_{ij} - \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} \cdot x_{ij} = 58 - 52 = 6 \text{ од. рес.}$$

Те ж у традиційному варіанті:

$$\sum_{(i,j)\in A} Дп^{d}{}_{ij} = \sum_{(i,j)\in A} D_{ij} \cdot c_{ij} - \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} \cdot d_{ij} = 52 - 30 = 22 \text{ од. рес.}$$

Якщо традиційно потрібне додаткове залучення 22 одиниць ресурсів, що становить 100 %, то в оптимальному варіанті потрібно 6 одиниць ресурсів – це складає 27 % від 100 %.

Такий підхід є порівняльним і не передбачає врахування вартості робіт, що важливо при розробці комплексного укрупненого сітьового графіка (КУСГа) у складі проекту організації будівництва (ПОБ) або техніко-економічного обґрунтування (ТЕО) проекту.

Виконаємо перевірочне розв'язання поставленої задачі універсальним симплекс-методом.

Розв'язання задачі симплекс-методом вимагає приведення її до канонічного вигляду. Різнобічність обмежень на виконання робіт $(i, j) \in A$ робить процес складним і важкодоступним. У розглянутому прикладі, де розв'язання засноване на графах і мережах (сітях), оптимальні рішення – x_{ij} мінімізують цільову функцію (6). Цей результат можна отримати на базі симплекс-методу, але такий підхід пов'язаний з потребами стандартизації підходу, що породжує труднощі у розв’язанні задачі. Якщо процедура відпрацьована, то проблеми спрощуються, але природа задачі і реалізація такої процедури буває складною.

Покажемо прийом приведення задачі до канонічного вигляду.

Цільова функція задачі має вигляд:

$$L(x) = 3\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 1\cdot x_4 + 1\cdot x_5 + 2\cdot x_6 + 1\cdot x_7 + 4\cdot x_8 \to max$$

Система обмежень задачі:

$x_1 + x_3 + x_5 + x_8 \leq 16$; $x_2 + x_5 + x_8 \leq 16$; $x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 \leq 16$;

$x_1 \leq 3$; $x_1 \geq 1$; $x_2 \leq 6$; $x_2 \geq 2$; $x_3 \leq 2$; $x_3 \geq 1$; $x_4 \leq 5$; $x_4 \geq 3$; $x_5 \leq 9$; $x_5 \geq 4$; $x_6 \leq 4$; $x_6 \geq 3$; $x_7 \leq 3$; $x_7 \geq 1$; $x_8 \leq 3$; $x_8 \geq 2$.

Розв’язання виконане за допомогою ЕОМ шляхом 14 ітерацій. У процесі розв’язання задачі додано 20 додаткових змінних, 8 штучних базисів. Ключові елементи матриць кожної ітерації відповідали наступним положенням: крок 0 – (20,8); крок 1 – (6,1); крок 2 – (10,3); крок 3 – (16,6); крок 4 – (8,2); крок 5 – (12,4); крок 6 – (14,5); крок 7 – (18,7); крок 8 – (19,28); крок 9 – (5,14); крок 10 – (9,18); крок 11 – (3,24); крок 12 – (4,16); крок 13 – (1,22).

Результат рішення отримав оптимальний план, визначені невідомі змінні, які мають такі значення: $x_1 = 3$; $x_2 = 5$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 8$; $x_6 = 4$; $x_7 = 1$; $x_8 = 3$.

Для остаточного переконання в правильності рішення задачі виконаємо перевірку її результатів.

Цільова функція прямої задачі:

$L(x) = 3\cdot3 + 1\cdot5 + 3\cdot2 + 1\cdot3 + 1\cdot8 + 2\cdot4 + 1\cdot1 + 4\cdot3=52$ од. рес.

Цільова функція двоїстої задачі:

$Z(f) = 16\cdot1 + 16\cdot0 + 16\cdot1 + 16\cdot1 + 3\cdot1 + 1\cdot0 + 6\cdot0 – 2\cdot0 + 2\cdot1 – 1\cdot0 + 5\cdot0 – 3\cdot1 + 9\cdot0 – 4\cdot0 + 4\cdot0 –3\cdot0 + 3\cdot0 – 1\cdot1 + 3\cdot1 – 0\cdot2 = 52$ од. рес.

Рівність цільових функцій прямої та двоїстої задач $L(x) = Z(f)$ свідчить про правильність розв’язання.

Результати розв’язання задачі двома методами збігаються, але вони мають різну трудомісткість. Їх аналіз свідчить, що підходи є прийнятними, але відрізняються специфікою, характерною для задачі теорії графів. Стандартний симплекс-метод застосовується до різнобічних обмежень та вимагає використання прийому формалізації М-задачі, що ускладнює структуру матриці.

Таким чином, кінцевий етап розв’язання задачі дає значення цільової функції $L(x) = 52$ одиниць ресурсів, складність процесу розв’язання полягає у великому обсязі обчислювальних процедур (тут мають місце 14 ітерацій з масштабними таблицями ітерацій).

Таким чином, вироблення управлінських рішень на сучасному етапі розвитку виробництва вимагає використання математичних методів моделювання та інформаційних технологій.

Установлено, що на оптимальне значення рішень (x_{ij}) впливає вихідна інформація (обмеження). Вони відсікають точність або її підживлюють необхідними додатковими даними. Порівняємо варіанти методів розв’язання задачі (табл. 2).

Таблиця 2

Порівняльна характеристика методів розв’язання задачі

Потокова задача (1-й варіант)	Сітьова задача (2-й варіант)	Задача на основі симплекс-методу (3-й варіант)
На цільову функцію впливають значення c_{ij} – $c_{ij} = n^d_{ij} / d_{ij}$ у процесі оптимізації $(i, j) \in A$ скорочення до 80 % – d_{ij}. Решта або D_{ij}, або d_{ij} за технологічних і організаційних умов. Звідси і точність значення цільової функції в межах 5 %.	Враховує як організаційно-технологічні умови ($D_{ij} \div d_{ij}$), так і вартісні ($c^D_{ij} – c^d_{ij}$), крім цього, модель враховує особливості умов звершення подій $T_{i(j)}$ і потреби скорочення операцій Δx_{ij}, виходячи з їх вартості. Цільова функція еталонна.	Цей підхід універсальний, вимагає знань теорії ЛП, питань приведення задачі до стандартного вигляду (канонічного). Необхідно володіти методикою зведення потреб практичних задач до М-задачі.

Говорити про справжній екстремум важко, оскільки значення c_{ij} (вартість скорочення операції) може прийматися вільно, без її реального фактичного значення. Математичне моделювання задачі потребує значення c_{ij} при її постановці, але значення c_{ij} мало впливають на стійкість рішення. Це означає, що при різних c_{ij} цільова функція змінює значення, а невідомі x_{ij} залишаються *const*. У випадку великої моделі (40 та більше операцій) значення x_{ij} (оптимальні значення) матимуть розбіжності до 5 %.

Наявний досвід розв’язання задач показує, що в більшості випадків c_{ij} визначається $c_{ij} = n_{ij}^{d} / d_{ij}$, оскільки до 80 % робіт скорочується до d_{ij}. Можливо, $c_{ij} = n_{ij}^{D} / D_{ij}$. Значна кількість робіт виконується за технологічних і організаційних умов або за D_{ij}, або за d_{ij}.

За відсутності даних або через труднощі їх отримання задовольняє рішення, яке орієнтує лінійне програмування на прийняття вибору. Але в разі збільшення кількості умов, що дозволяють оцінити вибір (крім організаційно-технологічних умов $d_{ij} - D_{ij}$, вартісні умови $c_{ij}^{D} - c_{ij}^{d}$) можлива ця ж постановка задачі з урахуванням додаткових вартісних обмежень. В цьому випадку оцінка рішення (критерій оптимальності) є жорсткішою.

Розглянемо постановку задачі з урахуванням додаткових обмежень і сформуємо математичну модель.

Використаємо такі позначення. Розглядається орієнтований граф $G(U, A)$, де U – упорядковані вузли графа, i = 1 – номер початкового вузла сіті, що описує (моделює) проект, $j = n$ – номер кінцевого вузла [2; 3].

Таким чином, $U=(1, 2, ...; n - 1, n)$ та $i<j$, де $A(i; j)$ – впорядкована кінцева безліч робіт (операцій) проекту; T_i – ранній час звершення (настання) події i.

Подія (вузол) відображає факт завершення всіх робіт $A(i, j)$, що входять у даний вузол. Тут реалізуються дві властивості графа: жодне U_i не відбудеться, якщо не будуть виконані всі операції графа, що ведуть до цієї події, і жодна робота $A(i, j)$ не почнеться, якщо U_i не сталося. Далі вводимо такі позначення:

D_{ij} – нормальна тривалість роботи $A(i, j)$, при детермінованому підході (метод СРМ (Corporate Performance Management)) або очікуваний час виконання операції при стохастичному підході (метод PERT (Project Evaluation and Review Technique));

d_{ij} – тривалість операції $A(i, j)$ при максимальному її скороченні;

Δx_{ij} – значення можливого скорочення $A(i, j)$ часу;

$T_з$ – заданий час будівництва (реалізації проекту), може бути директивним або встановленим вищим органом управління;

$\Delta x_{ij} = D_{ij} - x_{ij}$ – значення максимально можливого скорочення тривалості $A(i, j)$ за рахунок залучення додаткових ресурсів;

$c^{D}{}_{ij}$ – розрахункові витрати на реалізацію операції $A(i, j)$;

$c^{d}{}_{ij}$ – теж за умови максимального скорочення її тривалості за рахунок залучення додаткових ресурсів;

$K_{ij} = (c_{ij}^{d} - c_{ij}^{D}) / \Delta x_{ij}$ – питомі витрати на скорочення тривалості роботи $A(i, j)$ на одиницю часу.

Якщо m – кількість робіт $A(i, j)$, n – кількість $U_{i(j)}$, то модель задачі має $m + n$ змінних.

Припускається, що будь-яка частка скорочення Δx_{ij} часу на виконання роботи $A(i, j)$ має постійну (незмінну у часі) частку додаткових витрат. Це дозволяє для мінімуму витрат на скорочення часу реалізації проекту використовувати модель теорії оптимального лінійного програмування на графах та сітях.

Із використанням наведених позначеннь модель задачі матиме такий вигляд.

Визначимо цільову функцію задачі:

$$L(x) = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} \cdot \Delta x_{ij} \rightarrow min , \tag{17}$$

при обмеженнях:

$$T_j \geq T_i + D_{ij} - \Delta x_{ij} , \tag{18}$$

$$\Delta x_{ij} \leq (D_{ij} - d_{ij}) , \tag{19}$$

$$T_n \leq T_з , \tag{20}$$

$$T_i \geq 0, \ \Delta x_{ij} \geq 0, \ (i, j) \in A \tag{21}$$

Якщо A – кількість операцій моделі, U – кількість подій, то модель задачі має $A + n$ – змінних, n – обмежень (18), що відповідає числу кількості (вузлів) – U, обмеження (19) відповідає кількості операцій, $A + U$ – обмеження (21) та одне обмеження (20).

Разом є $A + U$ змінних, які слід визначити в результаті вирішення задачі. Для $U_{i(j)}$ визначаються ранні терміни звершення події моделі $T_{i(j)}$, а для A – можливе скорочення операцій в діапазоні $(D_{ij} - d_{ij})$ на Δx_{ij}, а також мінімізація витрат, необхідних (можливих) для скорочення часу (терміну) реалізації проекту.

Структурна схема матриці задачі наведена у таблиці 3.

Таблиця 3

Структурна схема матриці задачі

Матриця змінних задачі щодо термінів звершення подій моделі T_i, $i = 1,2,...,8$	Матриця змінних задачі щодо обмежень часу моделі D_i, $t_{ij} \leq D_{ij}$
Матриця обмежень терміну реалізації моделі $T_{зад} \leq 16$	Матриця обмежень на час виконання ітерацій $\Delta t = D_{ij} - d_{ij}$
Примітка: в результаті розв'язання задачі запропонованим методом визначається X_{opt} та T_{opt} (терміни реалізації операцій $(i - j)$), T_i , min залучення додаткових ресурсів при дотриманні $T_{зад}$ = 16 од. часу.	

Розглянемо приклад (табл. 4). Мінімізувати витрати при реалізації проекту в термін, установлений інвестором. Проект пусконалагоджувальної системи складається з восьми операцій (A = 8), вони мають взаємозв'язок, встановлений графом $G(U,A)$ (U = 7), T^D = 21міс., T^d = 11міс, $T_з$ = 16міс.

Використовуючи прийняті позначення, отримаємо економіко-математичну модель для визначення мінімальних витрат, необхідних для скорочення тривалості реалізації проекту з 21 до 16 місяців.

Таблиця 4

Вихідні дані для розрахунку

Код операції	Час виконання, міс.		Витрати, у. о. при часі виконання		Питомі витрати на місяць, у. о.
(i; j)	Нормальний, D_{ij}	Мінімальний, d_{ij}	Нормальний, $C^D{}_{ij}$	Мінімальний, $C^d{}_{ij}$	$(C^d - C^D)/(D - d)$
1-2	3	1	900	1 700	400
1-3	6	2	2 000	4 000	500
2-3	2	1	500	10 00	500
3-4	5	3	1 800	2 400	300
3-6	9	4	8 000	9 800	360
4-5	4	3	1 500	1 850	350
5-6	3	1	3 000	3 900	450
6-7	3	2	1 000	2 000	1 000
			18 700	26 650	

Визначимо вихідні дані до розв'язання задачі (табл. 5).

Таблиця 5

Матриця змінних задачі

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	
	0	0	0	0	0	0	0	400	500	500	300	360	350	450	1000	min
1	– 1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	≥3
2	– 1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	≥6
3	0	– 1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	≥2
4	0	0	– 1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	≥5
5	0	0	– 1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	≥9
6	0	0	0	– 1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	≥4
7	0	0	0	0	– 1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	≥3
8	0	0	0	0	0	– 1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	≥3
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	≤2
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	≤4
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	≤1
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	≤2
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	≤5
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	≤1
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	≤2
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	≤1
17	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	≤16

1-ша група змінних – терміни звершення подій T_i: $x_1 = T_{101}$, $x_2 = T_{102}$, $x_3 = T_{103}$, $x_4 = T_{104}$, $x_5 = T_{105}$, $x_6 = T_{106}$, $x_7 = T_{107}$

2-га група змінних – оптимальні тривалості робіт: $x_8 = \Delta\, x_{101\text{-}102}$, $x_9 = \Delta\, x_{101\text{-}103}$, $x_{10} = \Delta\, x_{102\text{-}103}$, $x_{11} = \Delta\, x_{103\text{-}104}$, $x_{12} = \Delta\, x_{103\text{-}106}$, $x_{13} = \Delta\, x_{104\text{-}105}$, $x_{14} = \Delta\, x_{105\text{-}106}$, $x_{15} = \Delta\, x_{106\text{-}107}$

Цільова функція:

$L(x)=0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 + 0\cdot x_7 + 400\cdot x_8 + 500\cdot x_9 + 500\cdot x_{10} + 300\cdot x_{11} + 360\cdot x_{12} + 350\cdot x_{13} + 450\cdot x_{14} + 1000\cdot x_{15} \to min.$

Обмеження розв’язання задачі:

$-x_1 + x_2 + x_8 \geq 3;\ -x_1 + x_3 + x_9 \geq 6;\ -x_2 + x_3 + x_{10} \geq 2;\ -x_3 + x_4 + x_{11} \geq 5;\ -x_3 + x_6 + x_{12} \geq 9;$

$-x_4 + x_5 + x_{13} \geq 4;\ -x_5 + x_6 + x_{14} \geq 3;\ -x_6 + x_7 + x_{15} \geq 3;$

$x_8 \leq 2;\ x_9 \leq 4;\ x_{10} \leq 1;\ x_{11} \leq 2;\ x_{12} \leq 5;\ x_{13} \leq 1;\ x_{14} \leq 2;\ x_{15} \leq 1;\ x_7 \leq 16.$

Далі приступимо до розрахунку задачі. Запишемо систему обмежень задачі в канонічному вигляді:

$-1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 + 1\cdot x_8 + 0\cdot x_9 + 0\cdot x_{10} + 0\cdot x_{11} + 0\cdot x_{12} + 0\cdot x_{13} +$

$+ 0\cdot x_{14} + 0\cdot x_{15} + 1\cdot x_{16} = 3$

$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 6;\ -x_2 + x_3 + x_{10} \geq 2;\ -x_3 + x_4 + x_{11} \geq 5;\ -x_3 + x_6 + x_{12} \geq 9;$

$-x_4 + x_5 + x_{13} \geq 4;\ -x_5 + x_6 + x_{14} \geq 3;\ -x_6 + x_7 + x_{15} \geq 3;$

$x_8 \leq 2\ ;\ x_9 \leq 4;\ x_{10} \leq 1;\ x_{11} \leq 2;\ x_{12} \leq 5;\ x_{13} \leq 1;\ x_{14} \leq 2;\ x_{15} \leq 1;\ x_7 \leq 16.$

Рішення виконане за допомогою ЕОМ шляхом 11 ітерацій. В процесі рішення задачі додано 17 додаткових змінних, 8 штучних базисів. Ключові елементи матриць кожної ітерації відповідали наступним положенням: крок 0 – (7,6); крок 1 – (6,5); крок 2 – (5,4); крок 3 – (3,3); крок 4 – (1,2); крок 5 – (17,7); крок 6 – (12,11); крок 7 – (4,13); крок 8 – (2,9); крок 9 – (14,12); крок 10 – (8,14).

Отримано оптимальний план розв’язання задачі, визначено невідомі змінні, які отримали наступні значення: $x_1 = T_{101} = 0;\ x_2 = T_{102} = 3;\ x_3 = T_{103} = 5;\ x_4 = T_{104} = 8;\ x_5 = T_{105} = 11;\ x_6 = T_{106} = 13;\ x_7 = T_{107} = 16;\ x_8 = \Delta\, x_{101\text{-}102} = 0;\ x_9 = \Delta\, x_{101\text{-}103} = 1;\ x_{10} = \Delta\, x_{102\text{-}103} = 0;\ x_{11} = \Delta\, x_{103\text{-}104} = 2;\ x_{12} = \Delta\, x_{103\text{-}106} = 1;\ x_{13} = \Delta\, x_{104\text{-}105} = 1;\ x_{14} = \Delta\, x_{105\text{-}106} = 1;\ x_{15} = \Delta\, x_{106\text{-}107} = 0.$

Далі виконаємо перевірку результатів розв’язання задачі.

Перевірка за цільовою функцією прямої задачі: $L(x) = 0{\cdot}0 + 0{\cdot}3 + 0{\cdot}5 + 0{\cdot}8 + 0{\cdot}11 + 0{\cdot}13 + 0{\cdot}16 + 400{\cdot}0 + 500{\cdot}1 + 500{\cdot}0 + 300{\cdot}2 + 360{\cdot}1 + 350{\cdot}1 + 450{\cdot}1 + 1000{\cdot}0 = 2260$ у. о.

Перевірка за цільовою функцією двоїстої задачі:

$Z(f) = 310{\cdot}3 + 500{\cdot}6 + 310{\cdot}2 + 5{\cdot}450 + 360{\cdot}9 + 450{\cdot}4 + 450{\cdot}3 + 810{\cdot}3 - 0{\cdot}2 - 0{\cdot}4 - 0{\cdot}1 - 150{\cdot}2 - 0{\cdot}5 - 100{\cdot}1 - 0{\cdot}2 - 0{\cdot}1 - 810{\cdot}16 = 15620 - 13360 = 2260$ у. о.

Перевірка за універсальною симплекс-формулою:

$$x^{нов}_{ij} = x^{стар}_{ij} - \frac{x_i^{кл} \cdot x_j^{кл}}{x_{ij}^{кл.эл.}}$$

$$L(x) = L(x)_{ij}^{стар} - \frac{L(x)_i^{кл} \cdot L(x)_j^{кл}}{x_{ij}^{кл.эл.}} = -1450 - \frac{(-1)\cdot(-810)}{1} = 1450 + 810 = 2260\,у.\ о.$$

Перевірказа обмеженнями:

$-x_1 + x_2 + x_8 \geq 3$ $-0 + 3 + 0 = 3$	$x_8 \leq 2$ $0 < 2$
$-x_1 + x_3 + x_9 \geq 6$ $-0 + 5 + 1 = 6$	$x_9 \leq 4$ $1 < 4$
$-x_2 + x_3 + x_{10} \geq 2$ $-3 + 5 + 0 = 2$	$x_{10} \leq 1$ $0 < 1$
$-x_3 + x_4 + x_{11} \geq 5$ $-5 + 8 + 2 = 5$	$x_{11} \leq 2$ $2 = 2$
$-x_3 + x_6 + x_{12} \geq 9$ $-5 + 13 + 1 = 9$	$x_{12} \leq 5$ $1 < 5$
$-x_4 + x_5 + x_{13} \geq 4$ $-8 + 11 + 1 = 4$	$x_{13} \leq 1$ $1 = 1$
$-x_5 + x_6 + x_{14} \geq 3$ $-11 + 13 + 1 = 3$	$x_{14} \leq 2$ $1 < 2$
$-x_6 + x_7 + x_{15} \geq 3$ $-13 + 16 + 0 = 3$	$x_{15} \leq 1$ $0 < 1$
	$x_7 \leq 16$ $16 = 16$

Проаналізуємо результат розв'язання задачі (рис. 4, рис. 5).

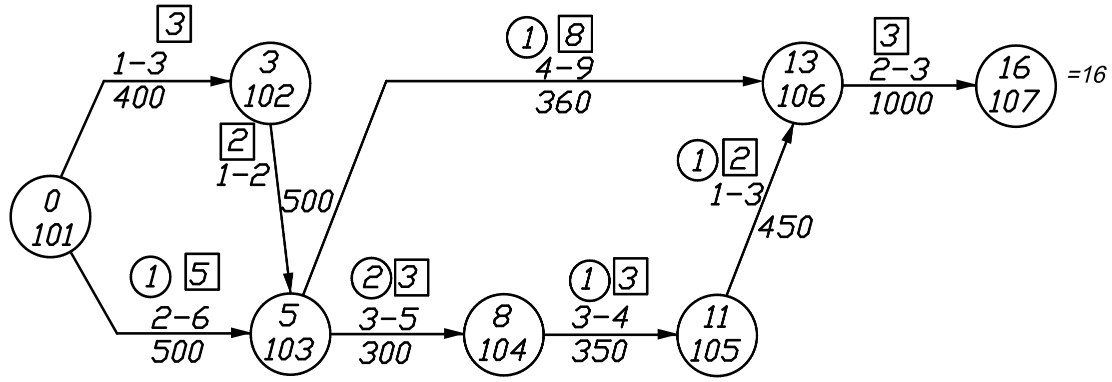

Рис. 4. Результат розв'язання задачі

Цільова функція задачі: $L(x) = 400{\cdot}0 + 500{\cdot}1 + 500{\cdot}0 + 300{\cdot}2 + 360{\cdot}1 + 350{\cdot}1 + 450{\cdot}1 + 1000{\cdot}0 = 2260$ у. о.

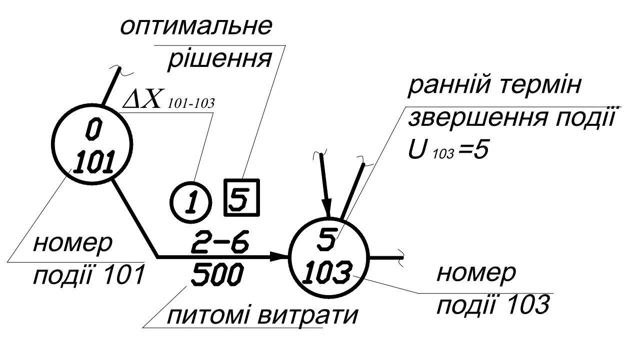

Рис. 5. Умовні позначення

Отримані невідомі змінні Δx_{ij} мають значення в порядку зростання кодів операцій: 0, 1, 0, 2, 1, 1, 1, 0, тобто значення невідомих x_{ij} визначаються як $D_{ij} - \Delta x_{ij}$ и дорівнюють 3 – 0 = 3; 6 – 1 = 5; 2 – 0 = 2; 5 – 2 = 3; 9 – 1 = 8; 4 – 1 = 3; 3 – 1 = 2; 3 – 0 = 3.

Значення цільової функції:

$$L(x) = 400 \cdot \Delta x_{12} + 500 \cdot \Delta x_{13} + 500 \cdot \Delta x_{23} + 300 \cdot \Delta x_{34} + 360 \cdot \Delta x_{36} + 350 \cdot \Delta x_{45} + 450 \cdot \Delta x_{56} +$$
$$+ 1000 \cdot \Delta x_{67} = 400 \cdot 0 + 500 \cdot 1 + 500 \cdot 0 + 300 \cdot 2 + 360 \cdot 1 + 350 \cdot 1 + 450 \cdot 1 + 1000 \cdot 0 = 2260\ у.\ о.$$

Значення цільової функції показує, що для скорочення терміну реалізації проекту пусконалагоджувальної системи від T^D = 21міс. До $T_з$ = 16 міс. потрібно понести додаткові витрати, значення яких становить оптимальний розмір 2260 у. о. Тут мова йде про граничні мінімальні витрати і поняття «менше або більше» у додаткових витратах не має сенсу. Якщо ці витрати не влаштовують інвестора, то рішення можна переглянути, але з нічого нічого не буває. Для скорочення терміну реалізації проекту інвестору потрібно додатково залучити кошти відповідно до певної оптимальної стратегії.

Метод розв’язання задачі об'ємний, вимагає спеціального прийому приведення до канонічного вигляду, а розв’язання за допомогою потокового алгоритму спрощує підхід. Але попередньо слід визначити реальну вартість C_{ij} за скорочення операції на одиницю часу. У будь-якому випадку розбіжність у значеннях цільової функції становить у розглянутому прикладі $L(x) = 2260\ у.\ о.$, порівняно з $L(x)^* = 2360\ у.\ о.$, 4,4 %, що у великих проектах цілком припустимо при використанні потокового алгоритму теорії графів.

Висновки. В результаті проведеного дослідження запропоновано підхід до оцінки організаційно-технічних рішень реалізації складних будівельних проектів у строк, установлений інвестором. Новий підхід дозволяє розробити на основі потокових моделей ефективні управлінські рішення з урахуванням необхідних і можливих організаційно-технічних умов та обмежень будівельного виробництва.

Задача вибору терміну реалізації будівельного проекту розв’язується новаційним методом, що базується на теорії графів і потокових алгоритмах. Він дозволяє визначити оптимальні строки виконання робіт при реалізації будівельного проекту в визначений термін з урахуванням часових і вартісних обмежень.

Ефективність запропонованого методу обґрунтована шляхом порівняльного аналізу з універсальним симплекс-методом.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. **Павлов И. Д.** Исследование системотехнических и логистических условий по интеграции участников сложных проектов / И. Д. Павлов, А. В. Радкевич, Ф. И. Павлов // Вісник Придніпр. держ. акад будівниц. та архітектури. – Д. : ПДАБА, 2007. – № 11. – С. 38 – 44.

2. **Оре О.** Теория графов / О. Оре. – М. : Наука, 1980, – 336 с.

3. **Филлипс Д.** Методы анализа сетей / Д. Филлипс, А. Гарсиа-Диас. – М. : Мир, 1984. – 496 с.

4. **Павлов И. Д.** Модели управления проектами:учеб. пособ. ЗГИА / И. Д. Павлов. – Запорожье: Изд-во ЗГИА, 1999. – 316 с.

5. **Радкевич А. В.** Багатоцільові моделі організації капітального відновлення об’єктів: Монографія / А. В. Радкевич, І. Д. Павлов. – Д. : Вид-во «П. П. Свідлер», 2003. – 225 с.

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПРОСТОРОВИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ СФЕРИЧНИХ ТІЛ ПРИ НЕСИМЕТРИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

А. М. Смоляр, к. т. н., доц., І. В. Мірошкіна, к. т. н.
Черкаський державний технологічний університет

Ключові слова: *просторові осесиметричні сферичні тіла, несиметричне навантаження, аналітично-чисельна методика, узагальнений метод скінченних інтегральних перетворень, сферичний меніск*

Вступ. Просторові осесиметричні сферичні тіла є розрахунковою моделлю класу об’єктів будівництва та техніки, таких як корпуси атомних реакторів, доменних печей, елементи корпусів літальних об’єктів, наприклад, носових частин ракет самонаведення тощо.

Під осесиметричними сферичними тілами будемо розуміти просторові тіла у сферичній системі координат, обмежені двома боковими поверхнями, що однозначно проектуються на