

Светло-серым цветом на диаграмме (рис. 4) показана удельная экономия условного энергоносителя, а темно-серым – удельная экономия электроэнергии при использовании солнечных водонагревателей вместо электротенев. Показатели верны для СВН (солнечный водонагреватель), по направлению на юг и под наклоном 30° к горизонту плоскости солнечного коллектора [5].

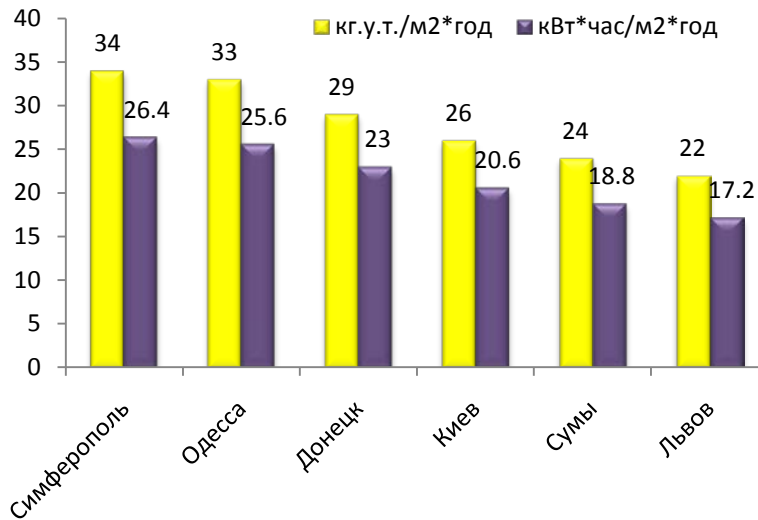


Рис. 4. Удельная экономия энергоносителя и электроэнергии

Таким образом, использование солнечных коллекторов является актуальным аспектом при решении вопросов энергосбережения зданий в северных широтах.

Анализ использования солнечных коллекторов без вспомогательного оборудования в Украине и в северных странах показывает, что это очень хороший способ нагрева воды на ГВС, но пока что недостаточный для полного отопления дома в зимний период [4]. Поэтому, устанавливая такие системы, заказчики должны сообщать проектировщику, для каких целей им эти системы нужны, а проектировщик, в свою очередь, будет принимать соответствующие меры, проводя определенные исследования в этой области или ссылаясь на подобные проекты.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Имбаби М. С., Муссет А.** Гибридный проект солнечного отопления и вентиляции в Монмунске // Построение и окружающая среда. – 1995. – Вып. 30. – С. 91 – 98.
2. **Имбаби М. С., Гордон Р.** Турбулентная модель потока воздуха в помещении гибридной солнечной системы отопления и вентиляции, в европейской конференции о сохранении энергии и внутреннего климата помещений // Строительство и окружающая среда – 1994. – Вып. 24. – С. 131 – 135.
3. **Сабади П. Р.** Солнечный дом / Пер. с англ. Н. Б. Гладковой. – М. : Стройиздат, 1981.– 113 с.
4. **Дан П. Д., Рей Д. А.** Тепловые трубы: Пер. с англ. – М. : Энергия, 1979. – 272 с.
5. **Лабейш В. Г.** Нетрадиционные и возобновляемые источники энергии. – СПб. : СТЗУ, 2003. – 179 с.

УДК 624.21

ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕДАТНИХ ФУНКЦІЙ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ШЛЯХОМ АНЛІЗУ ЇХ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ

В. П. Редченко, к. т. н.

Ключові слова: динамічні випробування, вільні коливання, передатна функція

Вступ. Металеві конструкції, які застосовуються в переважній більшості промислових, громадських та транспортних споруд, у звичайних варіантах їх конструктивного виконання та

типових розмірів можна вважати лінійними динамічними системами. Термін служби більшості таких споруд в Україні вичерпано, тому дуже важливим є науково-експериментальне обґрунтування його продовження, в тому числі і шляхом проведення їх динамічних випробувань [1]. В експериментальній практиці методи динамічних випробувань будівельних конструкцій поділяють на активні, коли застосовується певне динамічне навантаження, та пасивні, коли використовується випадкове збудження коливальних систем. Найбільш відпрацьованими з методологічної точки зору є методи активної вібродіагностики (особливо методи з використанням вібраційної машини) [2]. Існує усталена думка, що методи пасивної вібродіагностики не можуть дати тих результатів, які дають методи активної вібродіагностики [3; 4]. В той же час методи активної вібродіагностики не розповсюджені в практиці дослідження мостів в Україні, вони потребують набагато більших затрат коштів та часу, тому розвиток альтернативних методів динамічних випробувань мостових конструкцій є актуальною проблемою.

Аналіз публікацій. Відомо, що повністю ідентифікувати лінійну систему можна, визначивши її імпульсну перехідну функцію [2], а застосувавши операційне числення, лінійну стаціонарну систему можна з необхідною точністю представити за допомогою матриці передатних функцій, яка встановлює зв'язок між вхідною силою збудження та реакцією системи. Передатна функція є перетворенням Фур'є від реакції системи на навантаження у вигляді ідеального одиничного імпульсу. Реакція системи на такий імпульс називається *імпульсною перехідною функцією (імпульсною характеристикою)* або ж *функцією Гріна*. Найчастіше її позначають як $h(t)$. Якщо комплексну передатну функцію позначити як $K(\omega)$, то реакція лінійної системи описується як

$$S_{вих}(\omega) = S_{вх}(\omega)K(\omega) \quad (1)$$

де: $S_{вх}(\omega)$ та $S_{вих}(\omega)$ – відповідно спектральні функції навантаження на вході та реакції на виході системи.

Модуль комплексної передатної функції називають амплітудно-частотним спектром (АЧХ), аргумент – фазочастотним спектром (ФЧХ).

Метод функцій Гріна. Нехай є система з n ступенями свободи, яка описується лінійними диференціальними рівняннями другого ступеня. Якщо в k точках системи прикладені силові збудження $F(k)$, то реакцію системи в точці i – $y_i(t)$ можна представити таким виразом [2]

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^t F_k(\tau) h_{ik}(t, \tau) d\tau \quad (2)$$

Матрицю, складену з функцій $h_{ik}(t, \tau)$ – імпульсних перехідних функцій між точками i – k , називають *матрицею Гріна*.

Метод розкладання за власними формами. В системі нормальних узагальнених координат реакція $y_i(t)$ може бути представлена як сума n ортогональних реакцій за власними (модальними) формами коливальних систем [2; 5]:

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n y_{ij}(t) \quad (3)$$

Для практичних цілей найчастіше достатньо розглянути декілька перших власних форм (мод) коливальних систем.

Результати проведених досліджень. Об'єднуючи вирази (2) та (3) для лінійних стаціонарних систем, реакцію системи за j -ю власною формою можна представити як

$$y_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^t F_k(\tau) h_{ikj}(t, \tau) d\tau \quad (4)$$

де $h_{ikj}(t, \tau)$ – функція Гріна для пари точок i – k за j -ю власною формою.

Фактично кожен вираз функції Гріна тут представлено як суму ортогональних функцій, які назвемо *модальними імпульсними перехідними функціями (модальними функціями Гріна)*:

$$h_{ik}(t, \tau) = \sum_{j=1}^n h_{ikj}(t, \tau) \quad (5)$$

Відповідно до залежностей між імпульсною характеристикою та комплексною передатною функцією, останню також можна представити як суму модальних передатних функцій:

$$K_{ik}(\omega) = \sum_{j=1}^n K_{ikj}(\omega). \quad (6)$$

Отже, вільні коливання лінійної стаціонарної системи розглядаємо як суму ортогональних реакцій за власними формами, ваговий вплив яких визначається модальними функціями Гріна або ж модальними передатними функціями та початковими умовами, які передували вільним коливанням: швидкість (*імпульсна складова*) та зміщення (*кінематична складова*).

Враховуючи ортогональність модальних функцій Гріна, кожен модальну передатну функцію (перетворення Фур'є від модальної функції Гріна) можна визначити (розрахована) як для лінійного осцилятора, вільні коливання якого описуються наступною функцією [5]:

$$y(t) = e^{-\alpha t} \left[\frac{y'(0) + y(0)\alpha}{W_D} \sin(W_D t) + y(0) \cos(W_D t) \right] \quad (7)$$

де $y(0)$ та $y'(0)$ – початкові умови (зміщення та швидкість відповідно), α – коефіцієнт демпфірування, W_D – циклічна частота коливань власної форми системи з врахуванням демпфірування.

Імпульсне збудження. Якщо прийняти, що початкове зміщення $y(0) = 0$ і система збуджується імпульсом p , а отже, $y'(0) = p/m$ (m – маса системи), тоді:

$$y(t) = e^{-\alpha t} \left[\frac{p}{mW_D} \sin(W_D t) \right] \quad (8)$$

Використавши відомі залежності, що: $W_D^2 \approx W^2 = k/m = 1/mA_1$, де W – частота власної форми, k – жорсткість, A_1 – реакція від одиничної статичної сили; маємо:

$$y(t) = e^{-\alpha t} [pA_1 W \sin(W t)] \quad (9)$$

На рисунку наведено графік імпульсної перехідної функції за виразом (9) при $W = 2$, $pA_1 = 5$, $\alpha = 0,159$ (декремент коливань $\delta = 0,5$).

Отже, модальна функція Гріна має форму синуса з циклічною частотою W , а її початкова амплітуда пропорційна величині імпульсу p , циклічній частоті та статичному коефіцієнту впливу A_1 .

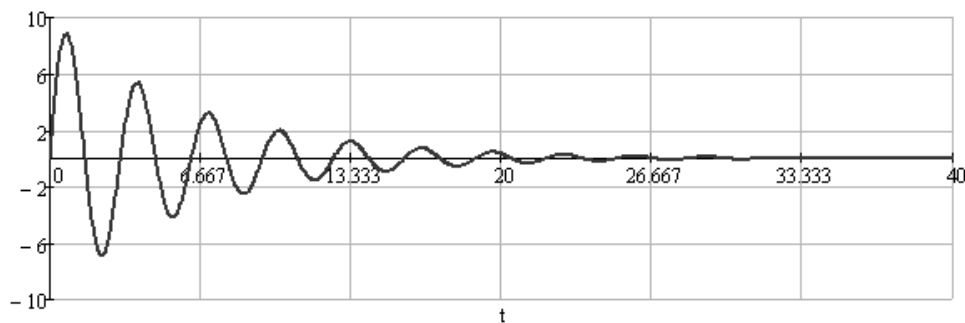


Рис. 1. Графік імпульсної перехідної функції лінійного осцилятора

Модальна передатна функція є перетворенням Фур'є від виразу (8) та з урахуванням властивостей вказаного перетворення може бути визначена як сума двох комплексних функцій:

$$K(\omega) = \frac{1}{2} \left(e^{-j\pi/2} \cdot Y(\omega - W) + e^{j\pi/2} \cdot Y(\omega + W) \right), \quad (10)$$

де

$$Y(\omega) = \frac{pWA_1}{\alpha + j\omega}.$$

Доданки у виразі (10) є копіями перетворення Фур'є від експоненційної функції, які зміщені від нуля в область від'ємних та додатних частот. Їх фазові складові повернуті на $(-\pi/2)$ та на $\pi/2$ відповідно, завдяки чому при $\omega = 0$ їх фази збігаються та рівні 0, модулі доданків складаються, тому, знехтувавши α порівнянно з W , маємо наступний вираз для модуля комплексного коефіцієнта на нульовій частоті:

$$K(0) = p \frac{A_1 W}{\sqrt{\alpha^2 + W^2}} \approx p A_1 \quad (11)$$

Фазове положення на нульовій частоті, залежно від знаку при коефіцієнті впливу A_1 , може бути 0 або π .

Максимальні значення функції є при $\omega = \pm W$, тут один із доданків є набагато меншим за інший, а його фаза повернута на $\pi/2$, тому, нехтуючи одним із доданків та використавши залежність $\alpha = \delta W/2\pi$, маємо вираз для модуля комплексного коефіцієнта на власній частоті системи W :

$$K(W) \approx 0,5 p \frac{A_1 W}{\sqrt{\alpha^2}} = p A_1 \frac{\pi}{\delta} \quad (12)$$

Відношення $K(W)/K(0) = \pi/\delta$, як це і має бути для резонансної кривої (ще одна назва АЧХ) лінійного осцилятора.

Кінематичне збудження. Якщо прийняти, що початкове зміщення $y(0)=A$, швидкість $y'(0) = 0$, а система збуджується відпусканням, то, використавши залежності $\alpha = \delta W/2\pi$ та $W_D \approx W$, вираз (7) запишемо, як:

$$y(t) = A e^{-\alpha t} \left[\frac{\delta}{2\pi} \sin(Wt) + \cos(Wt) \right] \quad (13)$$

Нехтуючи першим доданком у дужках (для будівельних конструкцій $\delta/2\pi < 0,1$) та виразивши початкове відхилення через силу відтяжки $A = P A_1$, маємо:

$$y(t) = P A_1 e^{-\alpha t} \cos(Wt) \quad (14)$$

Перетворення Фур'є від виразу (14) має такий вигляд:

$$C(\omega) = \frac{1}{2} (Y(\omega - W) + Y(\omega + W)), \quad (15)$$

де

$$Y(\omega) = \frac{P A_1}{\alpha + j\omega}.$$

Доданки у виразі (15) є копіями перетворення Фур'є від експоненційної функції, які зміщені від нуля в область від'ємних та додатних частот. При $\omega = 0$ їх фази протилежні, отже, модуль суми рівний нулю $C(0) = 0$. Максимальні значення функції є при $\omega = \pm W$, тому подібно до виразу (12), маємо:

$$C(W) \approx 0,5 \frac{P A_1}{\sqrt{\alpha^2}} = \frac{P A_1 \pi}{W \delta} \quad (16)$$

Можна показати, що при рівності затраченої енергії при імпульсному та кінематичному збудженні амплітудні коефіцієнти у виразах (12) та (16) є рівними, тобто $p A_1 = P A_1/W$. Близькими є і амплітудні спектри реакцій на імпульсне та кінематичне збудження, найбільш подібні вони в зонах біля $\omega = \pm W$, а найбільше відрізняються при наближенні до $\omega = 0$.

З урахуванням першого доданка у виразі (13) та за умови рівності енергій в обох випадках збудження маємо таке співвідношення:

$$C(0) = \frac{P A_1}{W} \frac{\delta}{2\pi} = K(0) \frac{\delta}{2\pi} \quad (17)$$

Якщо розглянути імпульсну характеристику (9), зміщену на чверть періоду (фазове положення $-\pi/2$), то при обумовлених вище спрощеннях вона буде подібною реакції на кінематичне збудження. Подібність буде тим більшою чим меншим є декремент коливань, відповідно подібними будуть і їх амплітудні спектри (рис. 2).

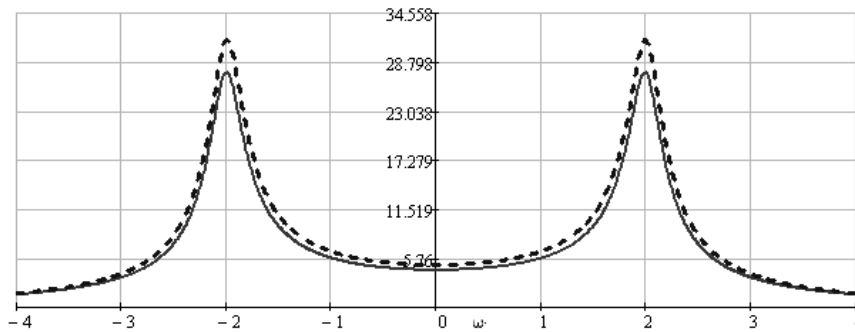


Рис. 2. Амплітудні спектри реакції: на кінематичне збудження зі зміщенням на чверть періоду – суцільною лінією; на імпульсне збудження – пунктиром

Якщо ж урахувати зменшення амплітуди за чверть періоду у вигляді коефіцієнта подібності κI , оберненого до згасання:

$$\kappa I = e^{\delta/4} \quad (18)$$

то графіки амплітудних спектрів за обома варіантами повністю збігаються. Якщо не виконується умова про рівність енергії, то слід також урахувати коефіцієнт приведення до одиничного імпульсу $\kappa 2 = W/P$, який випливає з виразу $pA_I = PA_I/W$.

Таким чином, передатну функцію осцилятора можна визначити як спектральну функцію реакції на його збудження як імпульсом, так і відтяжкою силою P . В останньому випадку перетворення Фур'є розраховується починаючи з часу, рівного чверті періоду власних коливань, а значення амплітудного спектра коригуються (множаться) на коефіцієнти κI та $\kappa 2$.

Для теоретичних досліджень та відпрацювання практичних методик запропоновано модель, яку можна описати таким виразом:

$$K_{ik}(\omega) = \sum_{n=1}^N K_{ikn}(\omega) \quad (19)$$

де: $K(\omega)_{ik}$ – передатна функція між точками i та k ; $K(\omega)_{ikn}$ – передатна функція між точками i та k за n -ю власною формою (модальна передатна функція).

Вільні коливання лінійної стаціонарної системи розглядаються як сума ортогональних реакцій за власними формами, ваговий вплив яких визначається модальними імпульсними функціями (функціями Гріна) або ж модальними передатними функціями та початковими умовами, які передували вільним коливанням: швидкість (*імпульсна складова*) та зміщення (*кінематична складова*). Враховуючи ортогональність модальних функцій Гріна, кожна модальна передатна функція (перетворення Фур'є від модальної функції Гріна) може бути визначена як для лінійного осцилятора, а комплексну передатну функцію можна отримати, склавши модальні передатні функції (для практичного використання достатньо декількох перших форм). Для лінійних систем вираз (19), визначений через власні кутові частоти W , декременти коливань δ та амплітуди власних форм A (вагові коефіцієнти), в комплексній формі записується як:

$$K_{ik}(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{W_n A_{ikn}}{2} (S_n + S_n^*) \quad (20)$$

де

$$S_n = \frac{e^{-j\pi/2}}{\delta_n W_n / 2\pi + j(\omega - W_n)}, S_n^* = \frac{e^{j\pi/2}}{\delta_n W_n / 2\pi + j(\omega + W_n)}.$$

Практичне застосування. Як один із варіантів практичного застосування передатної функції покажемо на прикладі. Для балкової прогонової будови автодорожнього мосту за типовим проектом вип. 122-63 повною довжиною 22,16 м, випробуванням визначені частоти двох перших форм коливань: 5,0 Гц (без викривлення поперечника) та 5,2 Гц (крутні коливання), декременти коливань мають значення 0,15 та 0,18 відповідно. Для крайньої балки при навантаженні протилежної смуги руху в середині прольоту силою 10 тонн вагові коефіцієнти становлять 2,15 мм та -1,8 мм. Амплітудний спектр передатної функції за виразом (20) та знайденими параметрами показано на рисунку 3.

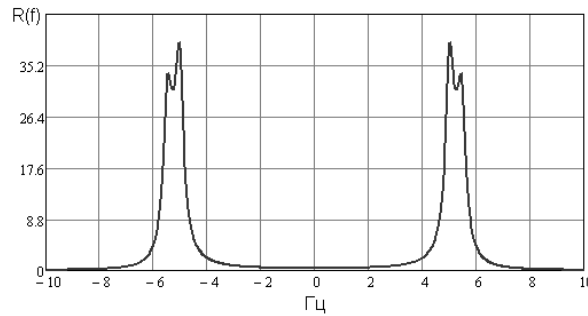


Рис. 3. Графік амплітудного спектра комплексної передатної функції

Добуток передатної функції та спектральної функції навантаження дає спектральну функцію реакції, за якою, виконавши зворотне перетворення Фур'є, отримуємо реакцію конструкції в часовій області. Реакцію даної системи на силу, що рухається, показано на рисунку 4.

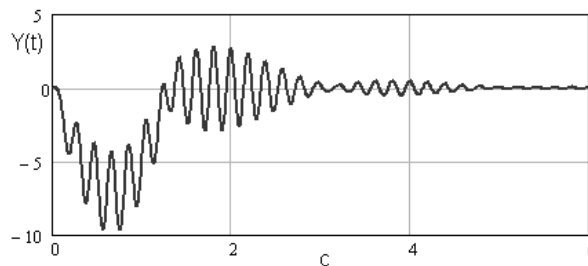


Рис. 4. Графік реакції балки на дію рухомої сили

Висновок. Виконані дослідження показують, що шляхом аналізу вільних коливань лінійних систем можна проводити їх ідентифікацію в тому ж обсязі, як і при використанні активного збудження. За розглянутою моделлю, для визначення передатної функції необхідно мати такі параметри:

- кутова частота коливань за власною формою (W_n);
- декремент коливань даної форми (δ_n);
- ваговий коефіцієнт впливу (A_{ikn}).

Саме визначення цих параметрів і має бути метою динамічних випробувань. Для практичних завдань, як правило, достатньо мати їх значення для декількох перших форм. Достатню кількість форм визначають шляхом аналізу розрахункової моделі конструкції.

Основною проблемою на шляху практичної реалізації запропонованої моделі є відсутність практичних методик, які б дозволяли визначати з необхідною точністю частоти та декременти власних форм коливань, особливо в зонах їх згущення. Саме ця проблема і є темою досліджень автора на даний момент часу. До речі, згущення частот викликає значні ускладнення і при активній вібродіагностиці, вимагаючи застосування декількох вібротрикерів, їх відповідної, часто складної, синхронізації і тощо.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Кулябко В. В. Динамика конструкций, зданий и сооружений: [учебник для студ. вузов] / Владимир Васильевич Кулябко. – Запорожье : Запорожская госуд. Инженер. акад., 2005. – 232 с.
2. Вибрации в технике: справочник в 6 т. / [сост. В. Н. Челомей и др.]. – М. : Машиностроение, 1978 – 1981.
3. Методические рекомендации по вибродиагностике автодорожных мостов. – Офиц. Изд. – М. : Росавтодор, 2001 – 24 с. – (Нормативный отраслевой документ).
4. Рекомендації з динамічних випробувань мостів та шляхопроводів: РВ.2.3-218-00018112-521:2006. – Офиц. вид. – К. : Укравтодор, 2006. – 34 с. – (Нормативний документ Укравтодора. Інструкція).
5. Клаф Р. Динамика сооружений: [пер. с англ.] / Р. Клаф, Дж. Пензиен. – М. : Стройиздат, 1979. – 320 с.