

тепловых и аэродинамических параметров при синтезе систем воздушно-лучистого отопления на газовом топливе / В. Ф. Иродов, Л. В. Солод // Вісник Придніпр. держ. акад. будівн. та архітектури. – Д. : ПДАБА, 2003. – № 6. – С. 32 – 38.

5. **Иссерлин А. С.** Газовое отопление / А. С. Иссерлин – Л. : Недра, 1979. – 143 с.

6. **Мачкаши А.** Лучистое отопление / А. Мачкаши, А. Банхиди; пер. с венгер. В. М. Беляева под ред. В. Н. Богословского, Л. М. Махова. – М. : Стройиздат, 1985. – 464 с.

7. **Родин А. К.** Газовое лучистое отопление / А. К. Родин – Л. : Недра, 1987. – 191 с.

8. Системы отопления и обогрева с газовыми инфракрасными излучателями : ISBN 978-5-98267-042-7. – [Действующий с 2007-01-01] – Издательство: АВОК-ПРЕСС, 2007. – 12 с. – (Стандарт АВОК).

9. СНиП 2.04.05-91 У. Отопление, вентиляция и кондиционирование. – К. : КиевЗНИИЭП, 1996. – 89 с.

10. **Солод Л. В.** Метод розрахунку і раціональні параметри інфрачервоних трубчастих газових обігрівачів: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.03 / Солод Леонтіна Валеріївна. – Харків, 2011. – 137 с.

11. **Строй А. Ф.** Критерий комфортности и методика определения мощности различных систем отопления / А. Ф. Строй, Ю. К. Припотень // Экотехнологии и ресурсосбережение. – 2000. – № 2. – С. 69 – 72.

12. Энергосбережение в системах теплоснабжения, вентиляции и кондиционирования воздуха : справ. пособ. / [Л. Д. Богуславский, В. И. Ливчак, В. П. Титов и др.]; под ред. Л. Д. Богуславского, В. И. Ливчака. – М. : Стройиздат, 1990. – 624 с.

13. **Fanger P. O.** Thermal comfort // Mc Grow Hill Book Co. New York. – 1973. – 244 p.

### УДК 539.3

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

*Е. И. Прудько, к. т. н., доц.*

**Ключевые слова:** механика, асимптотический метод, равномерно пригодное решение, аппроксимация Паде

**Постановка проблемы.** Асимптотические методы являются эффективным средством решения задач строительной механики [1 – 3]. Их основой является метод малого параметра  $\varepsilon$  в различных модификациях. Анализ многочисленных примеров подтверждает своеобразный «принцип дополнительности»: если при  $\varepsilon \rightarrow 0$  можно построить физически содержательную асимптотику, то существует нетривиальная асимптотика и при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Наиболее трудным, с точки зрения асимптотического подхода, оказывается промежуточный случай  $\varepsilon \sim 1$ . Правда, в этой области обычно хорошо работают численные методы. Однако, если стоит задача исследовать решение в зависимости от параметра  $\varepsilon$ , то неудобно пользоваться различными решениями в разных областях. Построение единого решения по предельным асимптотикам – нетривиальная и актуальная задача в области аналитических методов строительной механики.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Возможности интегрирования дифференциальных уравнений строительной механики в настоящее время неизмеримо расширились благодаря современным компьютерам, что открывает новые и совершенно неизвестные ранее горизонты. В то же время здесь таится и определенная опасность, на которую четко указали в предисловии к своей книге [4] известные специалисты в области строительной механики: «На страницы журналов лавиной хлынули работы с описанием численных экспериментов, реализованных порой с применением стандартных пакетов прикладных программ. К сожалению (а, может быть, и к счастью), таблицы на все случаи жизни не составишь. К тому же главное – не число, а понимание существа изучаемой проблемы. Что касается численных методов, то при постановке сложных задач предварительные аналитические решения проблемы могут оказать большую помощь, а иногда являются просто необходимыми для успешной реализации численного алгоритма». Весьма содержательный анализ соотношения численных и аналитических методов строительной механики содержится в [5; 6]. В них также подчеркивается необходимость широкого применения и дальнейшего развития аналитических методов строительной механики.

Основой аналитических подходов являются асимптотические методы [1 – 3]. Они особенно хорошо работают в области экстремальных значений параметров, т.е. именно там, где численные методы зачастую отказывают. Приоритет асимптотических методов в части получения качественной информации неоспорим. Хуже обстоит дело с количественными результатами, поскольку область действия асимптотик, как правило, локальна. Для преодоления этого недостатка необходимо развитие методов построения равномерно пригодных асимптотических решений.

**Цель статьи.** Исследование применимости двухточечных аппроксимаций Паде, рациональных асимптотически эквивалентных функций и метода составных уравнений для построения равномерно пригодных при любых значениях параметров аналитических решений задач строительной механики.

**Основные материалы.** Исходную задачу можно сформулировать следующим образом: известно поведение функции в зонах I и III (рис. 1), нужно достроить ее в зоне II. Для этой цели можно применить двухточечную аппроксимацию Паде (ДАП). Дадим ее определение [7; 8].

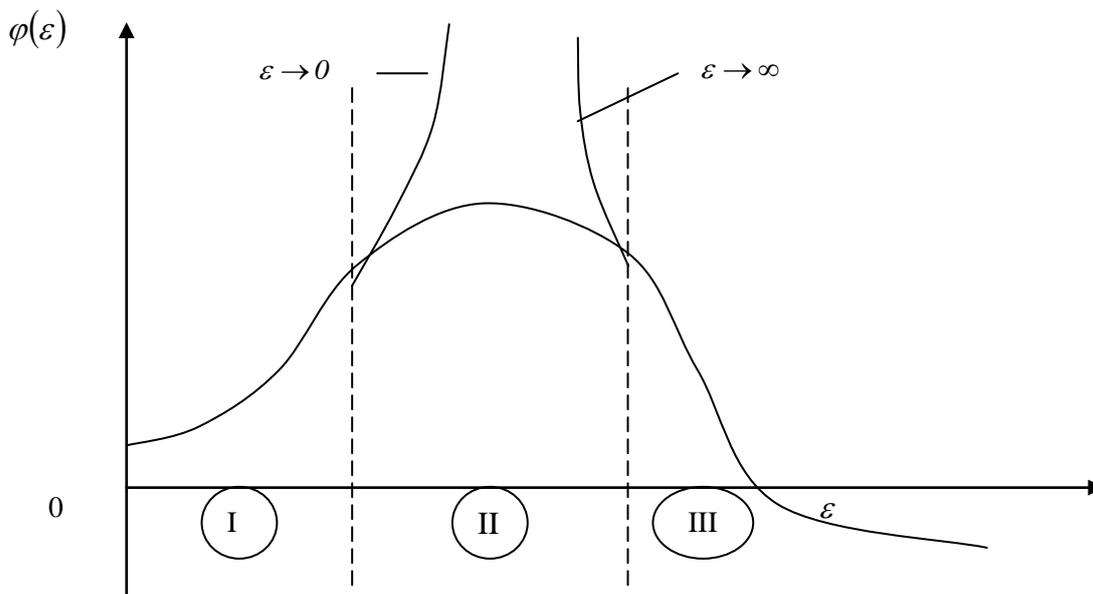


Рис. 1. Сращивание асимптотических решений

$$F(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon^i \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1)$$

$$F(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i \varepsilon^{-i} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Пусть ДАП – это дробно-рациональная функция,  $k$  коэффициентов которой определяются из ее разложения в ряд Маклорена по  $\varepsilon$ , а остальные коэффициенты – из ее разложения в ряд Лорана по  $\varepsilon^{-1}$ .

В качестве примера рассмотрим решение уравнения Ван дер Поля

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x}(x^2 - 1) + x = 0.$$

Асимптотические выражения периода колебаний для малых и больших значений параметра  $\varepsilon$  таковы [9]:

$$T = 2\pi \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{16} - \frac{5\varepsilon^4}{3072} \right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3)$$

$$T = \varepsilon(3 - 2 \ln 2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Построим ДАП, используя четыре условия при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и два условия при  $\varepsilon \rightarrow \infty$

$$T(\varepsilon) = \frac{a_0 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^3}{1 + b_1 \varepsilon + b_2 \varepsilon^2}, \quad (5)$$

где

$$a_0 = 2\pi; \quad a_1 = \frac{\pi^2(3-2\ln 2)}{4(3-2\ln 2)^2 - \pi^2}; \quad a_2 = \frac{\pi(3-2\ln 2)^2}{2(4(3-2\ln 2)^2 - \pi^2)}; \quad a_3 = \frac{\pi^2(3-2\ln 2)}{16(4(3-2\ln 2)^2 - \pi^2)};$$

$$b_1 = \frac{\pi(3-2\ln 2)}{2(4(3-2\ln 2)^2 - \pi^2)}; \quad b_2 = \frac{\pi^2}{16(4(3-2\ln 2)^2 - \pi^2)}.$$

В таблице 1 приведены результаты сравнения численных значений периода, приведенных в [10; 11], с результатами расчета по формуле (5).

Таблица 1

Сравнение численных результатов [10; 11] и расчетов при помощи ДАП

$\varepsilon$	$T_{\text{числ.}} [10; 11]$	$T_{\text{ДАП}}$
1	6.66	6.61
2	7.63	7.37
3	8.86	8.40
4	10.20	9.55
5	11.61	10.81
6	13.06	12.15
7	14.54	13.54
8	16.04	14.96
9	17.55	16.42
10	19.08	17.89
20	34.68	33.30
30	50.54	49.13
40	66.50	65.10
50	82.51	81.14
60	98.54	97.20
70	114.60	113.29
80	130.67	129.40
90	146.75	145.49
100	162.84	161.61

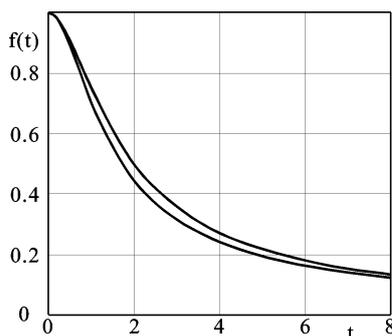


Рис. 2. Точное и приближенное обращения преобразования Лапласа

Рассмотрим еще обращение преобразования Лапласа при помощи ДАП. Пусть исходная функция такова:

$$f(t) = (1+t^2)^{-0.5}. \tag{6}$$

Асимптотики оригинала имеют вид:

$$f(t) \cong \begin{cases} 1 - 0.5t^2 + \dots & \text{при } t \rightarrow 0 \\ t^{-1} + \dots & \text{при } t \rightarrow \infty \end{cases}$$

ДАП в этом случае может быть записана так:

$$f(t) = \frac{1+0.5t}{1+0.5t+0.5t^2}. \quad (7)$$

Численные результаты приведены на рисунке 2. Приближенное решение (2.7) (верхняя кривая) хорошо совпадает с оригиналом (6) (нижняя кривая) для любых значений аргумента.

К сожалению, ситуация, когда обе предельные асимптотики имеют вид степенных разложений, редко встречаются на практике, поэтому приходится прибегать к другим приемам построения асимптотически эквивалентных функций [12]. Рассмотрим для примера краевую задачу

$$\varepsilon y_{xx} - xy = \varepsilon y, y(0) = 1, y(\infty) = 0, \varepsilon \ll 1 \quad (8)$$

Для построения решения при малых значениях  $x$  используем степенное разложение. В итоге имеем

$$y = 1 - a \xi + 1/6 \xi^3 + O(\xi^4) \quad (9)$$

где  $\xi = x\varepsilon^{-1/3}$ ,  $a$  – произвольная постоянная.

Решение при больших значениях  $x$  строится при помощи метода Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна [13]

$$y = b \xi^{1/4} \exp(-2/3 \xi^{3/2}) [1 - 5/48 \xi^{3/2} + O(\xi^3)], \quad (10)$$

где  $b$  – произвольная постоянная.

Сравним эти асимптотики. Из-за наличия экспоненты в выражении (10) использовать ДАП в исходном виде нельзя. Поэтому построим асимптотически эквивалентную функцию, исходя из следующих соображений: при больших значениях переменной экспонента учитывается полностью, а при подборе коэффициентов для малых значений переменной она раскладывается в ряд Маклорена. Построенное таким путём равномерно пригодное решение имеет вид

$$y_a = \frac{1 - a\xi + \frac{2}{3}\xi^{3/2} - \frac{2}{3}a\xi^{5/2} + \frac{32}{5}a\xi^4}{1 + \frac{32}{5}\frac{a}{b}\xi^{17/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right). \quad (11)$$

Коэффициенты  $a$  и  $b$  в выражении (11) остаются пока неопределёнными. Нахождение их представляет одну из проблем при решении краевых задач при помощи метода асимптотически эквивалентных функций. Для этой цели можно использовать некоторые интегральные соотношения, например, получаемые из уравнения (11) путём умножения на весовые функции  $1, x, x^2, \dots$  и дальнейшего интегрирования по всему промежутку  $[0, \infty)$ . В итоге найдены такие значения постоянных:

$$a = \sqrt[3]{3}\Gamma(2/3)/\Gamma(1/3), b = \sqrt[3]{9}\Gamma(2/3)/(2\sqrt{\pi}) \quad (12)$$

Численные расчеты показывают, что выражение (11) с постоянными (12) аппроксимирует искомое решение во всем интервале  $[0, \infty)$  с погрешностью, не превышающей 1,5 %.

При выборе констант можно использовать и другие приемы, тут многое зависит от искусства исследователя. Разумеется, необходимо обеспечить правильное качественное поведение асимптотически эквивалентных функций, не допуская, например, не соответствующих задаче нулей знаменателя. Для этого можно варьировать число членов в предельных асимптотиках и в числителе и знаменателе конструируемого равномерно пригодного решения.

Выше мы рассматривали сращивание решений задач строительной механики. Однако можно выполнять сращивание на уровне упрощенных уравнений. Асимптотическое расщепление позволяет свести исходную задачу к ряду различных предельных уравнений, справедливых при той или иной изменчивости искомого решения. Иными словами, имеет место неоднородность разложения по параметру изменчивости. В гидромеханике [14] используется для построения равномерно пригодных решений метод составных уравнений. Основные идеи этого метода таковы:

а) определяются члены дифференциальных уравнений, пренебрежение которыми порождает неоднородности;

б) возможно проще аппроксимируются эти члены, при этом сохраняются их существенные черты в области неоднородности.

Описанный метод можно использовать и для преодоления неоднородности разложения по параметру изменчивости, характерному для теории оболочек. Действительно, асимптотический анализ уравнений равновесия круговой цилиндрической оболочки

приводит к предельным соотношениям полубезмоментной теории, простого краевого эффекта, изгиба пластины и обобщенного плоского напряженного состояния [4]. Построим составное разрешающее уравнение основного состояния, включая в него предельные соотношения полубезмоментной теории и обобщенного плоского напряженного состояния. В безразмерных переменных оно имеет вид:

$$a^2 \left( \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \left( [1] + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \right) \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + [\Phi_{\xi\xi\xi\xi}] = 0. \quad (13)$$

где  $\Phi$  – разрешающая функция;  $a^2 = h^2 / (12(1 - \nu^2)R^2)$ ;  $R, h$  – радиус оболочки и ее толщина;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\xi = x/R, \eta = y/R$ ,  $x, y$  – продольная и кольцевая координаты.

Уравнение (13) не может быть получено в результате предельного перехода при какой-либо изменяемости напряженно-деформированного состояния (НДС). В то же время при малых изменяемостях НДС оно мало отличается от уравнения полубезмоментной теории (а именно, подчеркнутыми членами), а при больших – обобщенного плоского напряженного состояния (членами в квадратных скобках). Составное уравнение основного состояния имеет четвертый порядок по продольной координате и, следовательно, при его интегрировании могут быть удовлетворены лишь четыре граничных условия на краях оболочки. В связи с этим необходимо построить дополнительное состояние, компенсирующее невязки в граничных условиях, – составное уравнение краевого эффекта. В него включаем предельные соотношения простого краевого эффекта и изгиба пластины:

$$\Phi_{\xi\xi\xi\xi} + 2\Phi_{\xi\xi\eta\eta} + \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + [a^{-2}\Phi] = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) отличается от уравнения простого краевого эффекта подчеркнутыми членами, а от уравнения изгиба пластины – членом в квадратных скобках. При малой изменяемости НДС основное значение в нем имеют члены, описывающие простой краевой эффект, а при большой – изгиб пластины.

Приведем еще один пример. Уравнения Доннела-Муштари деформации нелинейных пологих цилиндрических оболочек имеют вид [3]

$$\frac{Eh^2}{12(1 - \nu^2)} \nabla^4 W = W_{xx} F_{yy} + W_{yy} F_{xx} - 2W_{xy} F_{xy} + \frac{1}{R} F_{xx} = 0$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 F + \frac{1}{R} W_{xx} + W_{xx} W_{yy} - (W_{xy})^2 = 0.$$

Здесь  $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ ;  $F$  – функция Эри;  $W$  – нормальное перемещение;

$E$  – модуль Юнга.

Эти уравнения дают большую погрешность при малой изменяемости напряженного состояния по кольцу, в связи с чем логично обобщить их следующим образом

$$\frac{D}{h} \nabla^4 W = W_{xx} F_{yy} + W_{yy} F_{xx} - 2W_{xy} F_{xy} + \frac{1}{R} F_{xx} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{1}{E} \nabla_1^4 F + \frac{1}{R} W_{xx} + W_{xx} W_{yy} - (W_{xy})^2 = 0, \quad (16)$$

где  $\nabla_1^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{R^2} \right)$ .

Уравнения (15), (16) асимптотически непоследовательны, зато достаточно точны при любой изменяемости НДС. Эти уравнения можно трактовать как составные.

**Выводы.** Использование методов построения асимптотически эквивалентных функций делает асимптотические методы конкурентоспособными по сравнению с численными. Может быть рекомендована такая схема. Если известно приближенное решение некоторой задачи механики при малых (больших) значениях некоторого параметра, то имеет смысл построить асимптотику и противоположного случая, т. е. при больших (малых) значениях этого параметра. Далее, если получились степенные разложения (например, ряд Маклорена и

Лорана), то следует применять двухточечную аппроксимацию Паде. Если решение в одном из пределов не степенное, сращивание следует производить при помощи рациональной асимптотически эквивалентной функции. Кроме того, имеет смысл проанализировать возможность построения составных уравнений.

#### ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Андрианов И. В.** Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. – М. : Машиностроение, 1991. – 416 с.
2. **Аргатов И. И.** Введение в асимптотическое моделирование в механике. – СПб. : Политехника, 2004. – 302 с.
3. Асимптотические методы в механике твердого тела / Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Товстик П. Е., Филиппов С. Б. – М. : Ижевск НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика, 2007. – 356 с.
4. **Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И.** Линейная теория тонких оболочек. – Л. : Политехника, 1991. – 655 с.
5. **Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г.** Прикладная математика: Предмет, логика, особенности подходов. Изд. 4-е. – М. : ЛКИ, 2007. – 376 с.
6. **Финдлин А. Я.** Особенности использования компьютерных методов в прикладной математике (о всеобщей компьютеризации и здравом смысле). – С. 350 – 358.
7. **Бейкер Г., Грейвс-Моррис П.** Аппроксимации Паде. – М. : Мир, 1986. – 502 с.
8. **Суетин С. П.** Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда. Успехи математических наук, 2002. – Т. 57. – № 1. – 2000. – С. 45 – 142.
9. **Hinch E. J.** Perturbation Methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. – 160 p.
10. **Andersen C. M., Dadfar M. B., Geer J. F.** Perturbation analysis of the limit cycle of the Van der Pol equation // SIAM J. – Appl – Math., 1984. – Vol. 44. – № 5. – P. 881 – 895.
11. **Суетин С. П.** Численный анализ некоторых характеристик предельного цикла свободного уравнения Ван дер Поля. // Совр. пробл. матем. 14, М. : МИАН, 2010. – 14. – С. 3 – 57.
12. **Слепян Л. И., Яковлев Ю. С.** Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.
13. **Найфэ А.** Введение в методы возмущений. – М. : Мир, 1984. – 536 с.
14. **Ван-Дайк М.** Методы возмущений в механике жидкости. – М. : Мир, 1967. – 310 с.