УДК 539.3

ПРИБЛИЖЕНИЕ КИРХГОФФА В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК – ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ И ОБОБЩЕНИЯ

Е. И. Прудько к. т. н., доц.

Ключевые слова: *нелинейные колебания, балка, уравнение Кирхгоффа, асимптотический анализ, нелинейные нормальные моды колебаний*

Постановка проблемы. Исследование влияния нелинейности на динамические процессы в строительных конструкциях важно с инженерной точки зрения и привлекает значительное внимание исследователей. В определенной мере запросы практики удовлетворяются благодаря численным методам, в первую очередь методу конечных элементов. Однако и аналитические решения не потеряли своего значения. Как правило, для их построения используются приближенные краевые задачи. Их анализ важен для понимания точности полученных решений и оценки области их применимости.

Анализ последних исследований и публикаций. Уравнение Кирхгоффа широко применяется в современной нелинейной механике. Оно позволяет, в частности, аналитически строить нормальные формы нелинейных колебаний распределенной системы для граничных условий шарнирного опирания, разделяя пространственную и временную переменные [3]. Для защемленных краев нормальные формы нелинейных колебаний строятся на основе уравнения Кирхгоффа при помощи метода Болотина [4; 5]. Используется уравнение Кирхгоффа и для более сложных задач [6 – 9]. Однако нигде мы не встречаем выписанных в явном виде ограничений, накладываемых «гипотезой Кирхгоффа». Между тем получить их нетрудно.

Нередко встречается ситуация, коогда в уравнение Кирхгоффа нужно ввести некоторые уточняющие члены, например, учитывающие влияние нелинейных составляющих кривизны. При этом, как правило, оказывается, что искусственно введенные члены имеют порядок отброшенной продольной инерции, поэтому их учет на базе уравнения Кирхгоффа необоснован.

Цель статьи. Целями настояшей работы являются: определение области применимости модели Кирхгоффа; обобщение ее на случай, когда на величину углов поворота не накладывается никаких ограничений; анализ имеющихся в литературе приближенных моделей.

Основные материалы. Напомним, что представляет собой приближение Кирхгоффа. Запишем исходные уравнения нелинейных колебаний балки в виде

$$\rho F\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}(T\theta)=0\ , \tag{1}$$

$$\rho F\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial T}{\partial x}=0\ , \tag{2}$$

где: $M=EI\kappa, \varepsilon=\dfrac{\partial U}{\partial x}+0.5\left(\dfrac{\partial W}{\partial x}\right)^2$, $\kappa=\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$, $T=EF\varepsilon$, $\theta=\dfrac{\partial W}{\partial x}$, E – модуль Юнга, F, I – площадь и статический момент поперечного сечения балки, U, W – продольное и нормальное перемещения балки, ρ – удельная плотность материала балки; t – время, x – пространственная координата.

Граничные условия примем в виде

$$U=0 \qquad \text{при} \quad x=0,L\ , \tag{3}$$

$$W=\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0 \quad \text{при} \quad x=0,L\ . \tag{4}$$

Если отбросить продольную инерцию в уравнении (2), то получаем

$$\varepsilon=\frac{\partial U}{\partial x}+0.5\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2=N\equiv\text{const.} \tag{5}$$

Интегрирование соотношения (5) с учетом граничных условий (3) позволяет найти продольное усилие N

$$N = \frac{1}{2L}\int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dx\,,$$

и уравнение (1) принимает вид

$$\rho F\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \frac{EF}{2L}\int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dx\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0\,. \qquad (6)$$

Уравнение (6) описывает приближенную модель Кирхгоффа. Несмотря на то, что название «модель Кирхгоффа» укоренилось в литературе [1], в оригинальной работе Кирхгоффа [2] его нет. Кирхгофф, наряду с отбрасыванием в уравнении (2) продольной инерции, опускал также и второй член в уравнении (1), так что оригинальное «уравнение Кирхгоффа» имеет вид

$$\rho F\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{EF}{2L}\int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dx\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0\,. \qquad (7)$$

Таким образом, выражение «гипотеза Кирхгоффа», под которой обычно понимают пренебрежение только продольной инерцией, не совсем точно, однако в силу его общепринятости не будем нарушать традицию.

Для оценки области применимости уравнения (6) приведем уравнения (1), (2) к безразмерной форме

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - \frac{\partial}{\partial \xi}(\left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + 0.5\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\right]\frac{\partial w}{\partial \xi}) = 0\,, \qquad (8)$$

$$\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.5\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2, \qquad (9)$$

где

$$w = W/h\,,\ u = UL/h^2\,,\ \xi = x/L\,,\ \tau = \sqrt{EI}\,t\Big/\left(\sqrt{\rho F}\,L\right),\ h = (I/F)^{1/2}\,,\ \alpha = h/L\,. \qquad (10)$$

Величина α играет роль малого параметра. Если изменяемости искомого решения по пространственной и временной координатам невелики, то из соотношения (9) следует возможность пренебречь продольной инерцией. Отсюда же, кстати, видна и необоснованность оригинального «уравнения Кирхгоффа» (7).

Предположим теперь, что изменяемость решения по пространственной координате увеличивается. Из уравнения (8) видно, что изменяемость по временной координате растет сообразно квадрату изменяемости по пространственной координате. Теперь оценим, когда члены в левой части уравнения (9) будут иметь один и тот же порядок. Нетрудно видеть, что для этого изменяемость по пространственной координате должна иметь порядок α^{-1}. Это и есть искомое ограничение. Следовательно, применять уравнение (6) при любой изменяемости по пространственной координате, как это сделано, например, в [6], неверно.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда на величину углов поворота не накладывается никаких ограничений. Исходные уравнения таковы

$$\rho F\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}(T\sin\theta + \frac{\partial M}{\partial x}\cos\theta) = 0\,, \qquad (11)$$

$$\rho F\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}(T\cos\theta - \frac{\partial M}{\partial x}\sin\theta) = 0\,. \qquad (12)$$

Здесь $M = EI\kappa, \varepsilon = (1 + 2\frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2)^{1/2} - 1, T = EF\varepsilon,\ \kappa = \frac{\partial \theta}{\partial x}$,

$\theta = arctg(\frac{\partial W}{\partial x}/(1 + \frac{\partial U}{\partial x})).$

Применяя обезразмеривание (10), из уравнений (11), (12) получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial \xi}(\alpha^{-3}\varepsilon\sin\theta + \alpha^{-1}\frac{\partial \kappa}{\partial \xi}\cos\theta) = 0\,, \qquad (13)$$

$$\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial}{\partial \xi}(\alpha^{-2}\varepsilon\cos\theta - \alpha\frac{\partial \kappa}{\partial \xi}\sin\theta) = 0, \qquad (14)$$

$$\theta = arctg(\alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} /(1+\alpha^2 \frac{\partial u}{\partial \xi})), \tag{15}$$

$$\varepsilon = ((1+\alpha^2 (2\frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2))^{1/2} - 1. \tag{16}$$

Отбрасывая члены порядка α^2 по сравнению с 1 и учитывая, что θ имеет порядок α , а ε – порядок α^2, получаем из уравнений (14) – (16)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \varepsilon \cos\theta = 0, \text{ отсюда } \varepsilon \cos\theta = N \equiv const, \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi} \cos\theta) + \alpha^{-2} N \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 , \tag{18}$$

где $$\theta = arctg(\alpha \frac{\partial w}{\partial \xi}), \quad \varepsilon = ((1+\alpha^2 (2\frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2))^{1/2} - 1, \tag{19}$$

$$\kappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\left[1+\alpha^2\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\right]^{-1}. \tag{20}$$

Если выполняются условия (3), то можно определить величину продольного усилия N:

$$N = (a/b)(-1+(1+\frac{\alpha^2 b}{a^2}\int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 d\xi)^{1/2}), \tag{21}$$

$$a = \int_0^1 \cos^{-1}\theta \; d\xi, b = \int_0^1 \cos^{-2}\theta \; d\xi, \cos\theta = \left[1+\alpha^2\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\right]^{-1/2}. \tag{22}$$

Уравнение (18) (с условиями (19) – (22)) – обобщенные уравнения Кирхгоффа. К сожалению, проинтегрировать точно эти уравнения невозможно, однако понижение порядка исходной нелинейной задачи дает возможность эффективно использовать численные методы. Если перейти к теории с малыми углами поворота, то уравнение (18) переходит в обычное уравнение Кирхгоффа. Если же применять метод возмущений, то уравнения (18) – (22) дают возможность последовательно учесть члены порядка α^2. Этим они отличаются от уравнений, используемых в [7 – 9].

Отметим, что полученные оценки применимости уравнения Кирхгоффа справедливы также и для упрощенного динамического уравнения Бергера, описывающего нелинейные колебания прямоугольной пластины со сторонами a и b [11]

$$D\nabla^4 W - T\nabla^2 W + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0;$$

$$Th^2 ab = 6D\int_0^b\int_0^a \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right] dxdy.$$

Здесь $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \nabla^4 = \nabla^2\nabla^2; D = Eh^3 \big/ \left(12(1-\nu^2)\right)$; h – толщина пластины; ν – коэффициент Пуассона.

Покажем процесс построения нормальных форм нелинейных колебаний на основе уравнений Кирхгоффа (6). В случае шарнирного опирания (4) исходное уравнение допускает разделение переменных

$$W(x,t) = \Phi(t)\sin\frac{m\pi x}{L}, m = 1,2,3,\dots .$$

Перейдем к более сложным граничным условиям. Пусть стержень упруго оперт:

$$\text{при } x = 0, L \quad w = 0, \; \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - c^* \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \tag{23}$$

где $c^* = c/(EI)$, c – коэффициент упругого защемления.

Представим порождающее решение в виде

$$w_0 = A\sin\frac{\pi(x-x_0)}{\lambda}\xi(t). \qquad (24)$$

Подставляя выражение (24) в (6), получим уравнение для определения функции ξ(*t*):

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2(1+\gamma\xi^2)\xi = 0, \qquad (25)$$

где $\omega^2 = EI\rho^{-1}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2$, $\gamma = 0.25(1+\lambda_1)\left(\frac{A}{r}\right)^2$; $r = \sqrt{I/F}$,

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{2\pi L}\left[\sin\frac{2\pi(L-x_0)}{\lambda} + \sin\frac{2\pi x_0}{\lambda}\right].$$

Уравнение (25) с начальными условиями

$$\xi(0) = 1; \quad \frac{d\xi(0)}{dt} = 0 \qquad (26)$$

имеет решение

$$\xi(t) = cn(\sigma t, k), \quad \sigma = \omega\sqrt{1+\gamma}, \qquad (27)$$

где $cn(...,...)$ – эллиптическая косинус-функция Якоби, период T которой равен 4*K*; $K = \int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-0.5}d\varphi$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода, модуль которого $k = \sqrt{0.5\gamma/(1+\gamma)}$ [12, гл.16].

Теперь решение задачи вдали от краев имеет вид

$$w_0 = W_0(x)cn(\sigma t, k), \qquad (28)$$

где $W_0(x) = A\sin\frac{\pi(x-x_0)}{\lambda}$.

Решение (28) удовлетворяет исходному уравнению (6), но не удовлетворяет граничным условиям (23). Для построения состояний, локализованных вблизи торцов, представим искомое решение в виде

$$w = w_0 + w_{кр}. \qquad (29)$$

Подставляя выражение (29) в уравнение (6), получаем

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}(w_0 + w_{кр}) - 0.5(r^2L)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(w_0 + w_{кр})\int_0^L\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_{кр}}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{\rho}{EI}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(w_0 + w_{кр}) = 0 \qquad (30)$$

Заметим, что, в отличие от рассмотренного ранее линейного случая, функции w_0 и $w_{кр}$ здесь оказываются связанными в силу нелинейности задачи. В то же время основное состояние и краевые эффекты сильно отличаются энергетически, так как последние локализованы в малой окрестности торцов стержня. Оценим порядки подынтегральных членов в уравнении (30) по отношению к $L/\lambda >> 1$:

$$\int_0^L\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 dx \sim \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2; -\int_0^L\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_{кр}}{\partial x}dx \sim \frac{L}{\lambda}; -\int_0^L\left(\frac{\partial w_{кр}}{\partial x}\right)^2 dx \sim 1 \qquad (31)$$

Ограничившись в уравнении (30) в первом приближении членом порядка $(\pi/\lambda)^2 >> 1$, приводим его к виду:

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 0.5(r^2L)^{-1}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\int_0^L\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{\rho}{EI}\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w_{кр}}{\partial x^4} - 0.5(r^2L)^{-1}\frac{\partial^2 w_{кр}}{\partial x^2}\int_0^L\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{\rho}{EI}\frac{\partial^2 w_{кр}}{\partial t^2} = 0$$

.(32)

Подставляя в выражение (32) значение w_0 (28), приходим к уравнению для определения функции $w_{кр}$:

$$\frac{\partial^4 w_{кр}}{\partial x^4} - B\mathrm{cn}^2(\sigma t, k)^{-1}\frac{\partial^2 w_{кр}}{\partial x^2} + \frac{\rho}{EI}\frac{\partial^2 w_{кр}}{\partial t^2} = 0, \qquad (33)$$

где $B=\gamma\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2$.

Решающее значение имеет тот факт, что уравнение (33) линейное, хотя и с переменным по времени коэффициентом. Пространственная и временная переменные точно не разделяются, поэтому для его решения применим метод Канторовича [13], представив $w_{кр}$ в виде

$$w_{кр}(x,t)\cong W_{кр}(x)\ \mathrm{cn}(\sigma t,\mathrm{k}). \qquad (34)$$

Подставляя выражение (34) в уравнение (33) и исключая время, получим для определения функции $S(x)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4W_{кр}}{dx^4}-B_1\frac{d^2W_{кр}}{dx^2}-\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2\left[\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2+B_1\right]W_{кр}=0\,, \qquad (35)$$

где $B_1=A\left(\frac{2k^2-1}{2k^2}+\frac{\sqrt{1-k^2}}{2k\arcsin k}\right)$. (36)

В соотношении (35) и далее функция $\arcsin(...)$ понимается в смысле ее главного значения.

Из четырех корней характеристического уравнения для обыкновенного дифференциального уравнения (35) два чисто мнимых соответствуют порождающему решению, поэтому их следует отбросить. Действительным корням отвечает решение

$$W_{кр}(x)=C_1\exp\left[-\sqrt{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2+B_1}\,x\right]+C_2\exp\left[\sqrt{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2+B_1}\,x\right].$$

Если взаимным влиянием торцов стержня можно пренебречь, то из условия затухания краевого эффекта при $x\to\infty$ находим, что $C_2 = 0$.

Удовлетворяя граничным условиям при $x = 0$

$$W_0+W_{кр}=0\,;\ \ \frac{d^2W_0}{dx^2}+\frac{d^2W_{кр}}{dx^2}=c*\left(\frac{dW_0}{dx}+\frac{dW_{кр}}{dx}\right),$$

определяем постоянную C_1:

$$C_1=A\sin\frac{\pi x_0}{\lambda}\,,$$

$$x_0=\frac{\lambda}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{\pi}{\lambda\left[\left(2(\pi/\lambda)^2+B_1\right)\Big/\left(c*+\sqrt{(\pi/\lambda)^2+B_1}\right)\right]}\,. \qquad (37)$$

Заметим, что при $c^*\to 0$ и $c^*\to\infty$ из формул (37) получаются решения для предельных случаев шарнирного опирания и жесткого защемления торцов стержня.

Аналогично можно построить динамический краевой эффект, локализованный у края $x = L$.

Формы собственных нелинейных колебаний стержня можно разделить на группы по типам симметрии. Для симметричных относительно точки $x = L/2$ форм из условия

$$\frac{dW_0}{dx}=0 \quad \text{при} \quad x=L/2$$

находим

$$L-2x_0=(2m+1)\pi\,; \quad m=1,2,\ldots\ . \qquad (38)$$

Для антисимметричных форм из условия

$$W_0=0 \ \text{ при } x=L/2$$

имеем

$$L-2x_0=2n\pi\,; \quad n=1,2,\ldots\ . \qquad (39)$$

Уравнения (38), (39) сводятся к одному

$$L-2x_0=m\pi\,; \quad m=1,2,\ldots, \qquad (40)$$

в котором четные значения m соответствуют антисимметричным, а нечетные –

симметричным относительно точки $x = L/2$ формам.

Таким образом, для определения постоянных λ и x_0 служат уравнения (36), (37) и (40). Решение этой системы не представляет труда.

Рассмотрим еще важный вопрос об определении вопрос о нелинейных нормальных формах колебаний распределенных систем строительной механики.

Как известно, при исследовании линейных колебательных систем с конечным числом степеней свободы решающую роль играют нормальные (главные) колебания. Каудерер [12] указал на существование в нелинейной системе решений, аналогичных нормальным колебаниям линейных систем. Он назвал эти решения главными и показал, как можно строить их траектории в конфигурационном пространстве. Розенберг [13] дал определение нормальных колебаний нелинейных систем с конечным числом степеней свободы, сформулировал задачу в конфигурационном пространстве и нашел несколько классов нелинейных систем, допускающих решения с прямолинейными траекториями [3; 16; 17], (подробности см. [14]). Обобщения этого понятия на распределенные системы, встречающиеся в литературе, так или иначе связаны с точным разделением пространственных и временных переменных [3; 16; 17], т.е. с возможностью представления искомой функции в виде

$$U(x,t) = X(x)T(t)$$

Ограниченность подобного определения понятна, разделение переменных возможно только для некоторых граничных условий. Опираясь на концепцию динамического краевого эффекта, можно предложить следующее определение: функция $U(x,t)$ называется нормальной формой нелинейных колебаний распределенной системы, если

$$U(x,t) = X(x)T(t) + Y(x,t),$$

где функция $T(t)$ периодическая, а функция $Y(x,t)$ – квазипериодическая по времени, при этом функция $Y(x,t)$ мала по сравнению с функцией $X(x)T(t)$в некоторой энергетической норме. Последнее условие может проверяться как априорно, так и апостериорно.

Выводы. На основе проведенного анализа можно сделать следующие выводы.

1. Без четкого понимания асимптотической природы той или иной гипотезы ее правильное применение невозможно [10].

2. Любая разумная феноменологическая инженерная теория может быть сформулирована как асимптотическая.

3. Предложенная обобщенная модель Кирхгоффа позволяет получать аналитические решения задач о нелинейных колебаниях балок с приемлемой для практических целей точностью.

4. К приведенным в литературе обобщенным моделям Кирхгоффа следует относиться с осторожностью.

5. Уравнения Кирхгоффа позволяют строить нормальные формы нелинейных колебаний балки при любых граничных условиях.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Каудерер Г.** Нелинейная механика. – М. : ИЛ, 1985. – 777 с.
2. **Кирхгоф Г.** Механика. Лекции по математической физике. 2е изд. – М. : УРСС, 2006. – 392 с.
3. **Маневич Л. И., Михлин Ю. В., Пилипчук В. Н.** Метод нормальных форм для существенно нелинейных систем. – М. : Наука, 1989. – 216 с.
4. **Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И.** Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. – М. : Наука, 1985. – 221 с.
5. **Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Андрианов И. В.** Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. – М. : Машиностроение, 1991. – 416 с.
6. **Suweken G., van Horssen W. T.** On the weakly nonlinear transversal vibrations of a conveyor belt with a low and time-varying velocity // Nonlinear Dynamics, 2003. – Vol. 31. – P. 197 – 203.
7. **Avramov K. V.** Non-linear beam oscillations exited by lateral force at combined resonance // J. Sound Vibr., 2002. – Vol. 257 (2). – P. 337 – 359.
8. **Болотин В.В.** Динамическая теория упругих систем. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 600 с.
9. **Avramov K. V.** Bifurcations of parametric oscillations of beam with three equilibria // Acta

Mechanica, 2003. – Vol. 164. – P. 115 – 138.
10. **Андрианов И. В., Баранцев Р. Г., Маневич Л. И.** Асимптотическая математика и синергетика: путь к целостной простоте. – М. : Эдиториал УРСС, 2005. – 304 с.
11. **Berger H.M.** A new approach to analysis of large deflections of plates // J. Appl. Mech., 1955. – Vol. 22. – № 4. – P. 465 – 472.
12. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М., Стиган И. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
13. **Канторович Л. В., Крылов В. И.** Приближенные методы высшего анализа. –М.-Л. : Физматгиз, 1962. – 708 с.
14. **Каудерер Г.** Нелинейная механика. – М. : ИЛ, 1961. – 777 с.
15. **Rosenberg R. M.** The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems // J. Appl. Mech., 1962. – Vol. 29. – P. 7 – 14.
16. **Mikhlin Yu. V., Avramov K. V.** Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments. Applied Mechanics Reviews, 2010. – Vol. 63. – P. 060802-1 – 060802-21.
17. **Аврамов К. В., Михлин Ю. В.** Нелинейная динамика упругих систем. Модели, методы, явления. М. : РХД, 2010. – Т. 1. – 704 с.