

плавки ст. 10СП. На остальных уровнях этих плавков точечная неоднородность составляет 0,5 – 3,0 балла, что соответствует ГОСТ 10243 – 75;

- центральная пористость в опытном и сравнительном слитках на различных уровнях практически одинакова и составляет 0,5 – 2,0 балла. Ликвационный квадрат находится в пределах 0 – 1,0 балла;

- общая пятнистая ликвация максимального балла 3,5 находится в сравнительном слитке на уровне 13,5 % плавки ст. 10СП, а в опытном слитке максимального балла 2,5 на уровне 14,5 % плавки ст. 40Х. На остальных уровнях этих плавков пятнистая ликвация составляет 0,5 – 2,0 балла, что соответствует ГОСТ 10243 – 75;

- флокены наблюдаются в опытном слитке на уровне 10,5 % плавки ст. 40Х, а в сравнительном слитке на уровне 13,5 % той же плавки. На остальных уровнях флокены отсутствуют;

- по вторичным усадочным дефектам (подусадочная ликвация, точечная неоднородность, центральная пористость, пятнистая ликвация, флокены) металл по ГОСТ 4728 – 96 имеет удовлетворительную макроструктуру, как для опытного, так и для сравнительного слитков с уровня 15,0 % от длины подката плавки ст. 40Х и с уровня 14,5 % от длины подката плавки ст. 10СП.

- распространение ликвирующих элементов С, Мп, Si, S и Р в опытных и сравнительных слитках равномерное и не превышает пределы ГОСТ 4543 – 71\* для плавки ст. 40Х и ГОСТ 1050 – 88 для плавки ст. 10СП. При этом содержание ликвирующих элементов в опытном и сравнительном слитках на исследуемых уровнях составляет соответственно: С = 0,36 – 0,44 и 0,37 – 0,46 %, Мп = 0,68 – 0,82 и 0,55 – 0,84 %, Si = 0,26 – 0,31 и 0,27 – 0,32 %, S = 0,035 – 0,042 и 0,033 – 0,04 %, Р = 0,012 – 0,032 и 0,013 – 0,03 % для плавки ст. 40Х и С = 0,1 – 0,14 и 0,12 – 0,16 %, Мп = 0,36 – 0,48 и 0,38 – 0,49 %, Si = 0,13 – 0,2 и 0,13 – 0,16 %, S = 0,032 – 0,042 и 0,029 – 0,04 %, Р = 0,011 – 0,019 и 0,01 – 0,017 % для плавки ст. 10СП.

**Выводы.** Анализ качества металла показал, что усадочные дефекты в слитках, отлитых с опытными прибыльными надставками, футерованными жаростойким бетоном, с уменьшенным на 0,038 м<sup>3</sup> ( 266 кг) расходом металла в прибыли, локализируются в пределах прибыльной части и не входят в тело слитка. Улучшение теплоизолирующей способности прибыльной надставки с футеровкой из жаростойкого бетона по сравнению с надставкой, футерованной шамотным кирпичом, позволяет говорить о возможности снижения головной обрезки слитков не менее чем на 1 %.

## ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **А. Ю. Конопляник.** Опыт и перспективы применения жаростойкого бетона для изготовления футеровки прибыльных надставок сталеплавильного производства // Вісник Придніпр. держ. акад. будівниц. та архітект. – Д. : ПДАБА, 2012. – № 6. – С. 36 – 41.

2. **Гизатулин Г. З., Белкин А. И., Агафонова Е. Н. и др.** Повышение качества 24 т слитков спокойной стали, отлитых с утеплением головной части // Сталь. – 1990. – № 9. – С. 75 – 76.

3. **Завадский М. Я., Конопляник А. Ю., Омесь Н. М. и др.** Повышение качества 8,5 т слитков спокойной стали, отлитых с утеплением головной части жаростойким бетоном // Metallurgical and Mining Industry. – 1992. – № 1. – С. 16 – 17.

УДК 624.131.524

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОСНОВАНИЯ ФУНДАМЕНТНЫХ ПЛИТ

*Е. И. Прудько, к. т. н., доц.*

**Ключевые слова:** упругое основание, коэффициенты постели, модель Винклера, двухпараметрическая модель

**Постановка проблемы и её связь с научными и практическими задачами.** При расчете конструкции на упругом основании возникают проблемы учета распределительных свойств основания, которые игнорируются в простейшем случае винклерова основания. Большинство

реальных грунтов обладает распределительной способностью, когда, в отличие от винклеровой расчетной схемы, в работу вовлекаются не только непосредственно нагруженные части основания, но и примыкающие к ним области не нагруженного грунта.

**Анализ последних исследований и публикаций.** В большинстве публикаций по расчету оснований и фундаментов используется простейшая модель упругого основания Винклера [1]. Недостатки такой модели исследовались в работах [2; 3]. Модели упругого основания с двумя коэффициентами постели предлагались в [4 – 6]. Анализ соответствия таких математических моделей оснований натурным испытаниям проводился в [7; 8].

**Целью статьи** является сравнительный анализ существующих моделей упругого основания, использующихся при расчёте фундаментных плит.

**Изложение материала. 1. Модель Винклера.** Недостатки винклеровой механической модели основания, в принципе не способной адекватно отразить реальную картину взаимодействия между конструкцией и подстилающим ее грунтом, хорошо известны. Главное ее достоинство – это предельная математическая простота, вот почему винклерова модель продолжает применяться.

В общем случае усилие взаимодействия между конструкцией и подстилающим ее упругим основанием связано с перемещением  $w$  поверхности упругого основания интегральной зависимостью (рассматривается двумерный случай)

$$w(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) r(\xi, \eta) d\Omega$$

где  $G(x, y, \xi, \eta)$  – ядро упругого основания, представляющее собой функцию влияния, а именно – перемещение точки  $P(x, y)$  поверхности упругого основания от единичной силы, приложенной в точке  $Q(\xi, \eta)$  по направлению нормали к этой поверхности. Интегрирование ведется по двумерной области  $\Omega$ , в которой функция  $r(\xi, \eta)$  отлична от нуля.

Наиболее разработанными являются модели упругого основания, у которых осадочная лунка от действия единичной силы является поверхностью вращения, то есть ядро является функцией расстояния  $\rho$  от точки  $Q(\xi, \eta)$  приложения силы до точки  $P(x, y)$  замера перемещения

$$G(x, y, \xi, \eta) = G(\rho), \quad \rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Натурные исследования показывают [2], что модель Винклера лучше отображает действительность в случаях илистых, торфяных грунтов и мелкозернистых водонасыщенных песков. Для винклерова основания ядро  $G$  представляет собой дельта-функцию Дирака  $\delta(\rho)$ :

$$G(\rho) = \delta(\rho) / k,$$

где  $k$  – коэффициент постели упругого основания.

При связанных грунтах применение модели Винклера становится необоснованным и искажающим реальную работу конструкции на упругом основании. Модель в виде упругого полупространства представляет основание как изотропное упругое тело бесконечных размеров в плане и по глубине. По сравнению с винклеровой моделью упругое полупространство завывает распределительные способности грунта, что неоднократно было показано в эксперименте [2]. Понижения распределительной способности упругого основания можно достичь, если глубину сжимаемой грунтовой толщи считать не бесконечной, а ограниченной некоторой величиной  $H$ . Ядро при этом окажется функцией не только расстояния  $\rho$ , но будет зависеть и от  $H$ , как от параметра. В этом случае приходим к модели основания как упругого слоя конечной толщины. Ядро упругого слоя конечной толщины представляет собой сложную функцию, зависящую, к тому же, и от краевых условий. Если рассматривать слой конечной толщины и лежащую на нем конструкцию в рамках единой расчетной схемы, то можно воспользоваться методом конечных элементов [3]. Однако за счет увеличения размерности задачи на единицу (двумерная задача расчета изгибаемой плиты, лежащей на слое, становится трехмерной) объем вычислительной работы вырастает на порядок.

**2. Модель упругого основания с двумя коэффициентами постели.** На сегодняшний день известны десятки предложений по совершенствованию механической модели грунтового основания, но, по-видимому, следующим по простоте математической постановки задачи после винклеровой модели шагом явилась разработка модели упругого основания с двумя коэффициентами постели, независимо и исходя из разных предпосылок, предложенная Пастернаком [4], Филоненко-Вороничем [5], Власовым [6]. Модель основания с двумя коэффициентами постели, с одной стороны, позволяет учитывать распределительную

способность грунта, а с другой – почти не усложняет математическую постановку задачи по сравнению с моделью Винклера.

Для основания с двумя коэффициентами постели ядро определяется модифицированной функцией Бесселя второго рода нулевого порядка  $K_0$

$$G(\rho) = \frac{I}{2\pi C_2} K_0(\rho \sqrt{C_1/C_2}), \quad (1)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – первый и второй коэффициенты постели упругого основания, причем первый коэффициент характеризует жесткость основания на сжатие, второй – на сдвиг.

Для модели упругого основания с двумя коэффициентами постели интегральное соотношение (1) может быть обращено, при этом связь между  $w$  и  $r$  принимает форму простой дифференциальной зависимости:

$$r = -C_2 \nabla^2 w + C_1 w, \quad (2)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Именно в простоте дифференциальной зависимости (2) и заключается математическая, а, значит, и вычислительная привлекательность этой модели.

Двухпараметрическая модель, в отличие от винклеровой, дает возможность предсказать изгиб плиты при равномерном нагружении, а также осадки поверхности упругого основания за пределами плана конструкции.

Предположив, что на двухпараметрическом основании покоится изгибаемая плита со свободными от внешних связей кромками, получим, что эта модель порождает фиктивные поперечные силы на свободных от закреплений краях плиты. Возьмем, к примеру, упругое полупространство или слой конечной толщины. Если получить аккуратное решение для плиты, покоящейся на таком основании, то под краями плиты контактное напряжение (отпор упругого основания  $r$ ) будет иметь особенность – точечное значение отпора равно бесконечности. Выражение для отпора  $r$ , развивающегося под подошвой круглого штампа радиуса  $R$ , вдавливаемого силой  $P$  в упругое полупространство, и имеет вид:

$$r(\rho) = \frac{P}{2\pi R \sqrt{R^2 - \rho^2}}, \quad (3)$$

где  $\rho \leq R$  – текущая радиальная координата точки штампа, под которой вычисляется отпор  $r$ .

Порядок особенности зависит от используемой модели, и все, чем отличается в этом смысле двухпараметрическая модель, это то, что для нее эта особенность принимает вид дельта-функции Дирака, являющейся математическим представлением сосредоточенной силы.

Задача о круглом штампе радиуса  $R$ , расположенном на упругом основании с двумя коэффициентами постели, при действии на штамп эксцентрично приложенной силы  $P$  (рис. 1) имеет следующее решение для осадки  $w_0$  в центре штампа и угла поворота  $\varphi$  штампа

$$w_0 = \frac{P}{\pi R^2 C_1} \frac{\xi K_0(\xi)}{\xi K_0(\xi) + 2K_1(\xi)}, \quad (4)$$

$$\varphi = \frac{4Pe}{\pi R^4 C_1} \frac{\xi K_1(\xi)}{\xi K_1(\xi) + 4K_2(\xi)}, \quad (5)$$

где  $e$  – эксцентриситет приложения силы  $P$ , а  $K_1$  и  $K_2$  – функции Макдональда первого и второго порядков от безразмерного аргумента  $\xi$ , при этом

$$\xi = R \sqrt{C_1/C_2}. \quad (6)$$

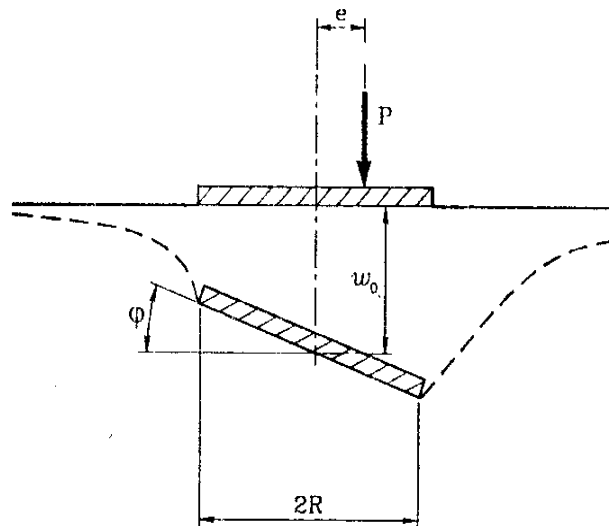


Рис. 1. Круглый штамп под воздействием силы и момента

Из уравнений (4), (5) получаем:

$$\frac{\omega_0 e}{R_2} = f(\xi), \quad (7)$$

при этом трансцендентная функция  $f(\xi)$  имеет вид

$$f(\xi) = \frac{K_0(\xi) \xi K_1(\xi) + 4K_2(\xi)}{4K_1(\xi) \xi K_0(\xi) + 2K_1(\xi)}. \quad (8)$$

Если имеются результаты штамповых испытаний, то из решения трансцендентного уравнения (8) определится безразмерный параметр  $\xi$ , подстановка значения которого в уравнение (4) дает возможность вычислить значение коэффициента  $C_1$ , а из (5) – значение коэффициента  $C_2$ . Именно так рекомендует поступать Пастернак [4], построивший для облегчения расчетов график функции  $f(\xi)$  (рис. 2).

Наиболее надежные результаты получаются при наличии серии испытаний, причем для штампов различных диаметров. Если статистическая обработка результатов вычислений коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  по результатам натурных испытаний выявит достаточную устойчивость этих коэффициентов в пределах площадки строительства, то это будет надежной основой для принятия числовых значений искомых коэффициентов при последующем формировании расчетной схемы конструкции и упругого основания. Однако как раз результатами натурных испытаний инженер располагает далеко не всегда, поскольку в лучшем случае таковые испытания проводятся только тогда, когда речь идет о проектировании весьма ответственных сооружений. Если поступать в соответствии с рекомендациями норм, то можно вычислить характеристики сжимаемой толщи грунта, определив условные (осредненные по высоте грунтовой толщи) параметры упругого слоя:  $E$ ,  $H$  и  $\nu$ . Располагая инструментом вычислений в виде расчетной программы, способной обрабатывать двухпараметрическую модель упругого основания, расчетчик будет стремиться перейти от модели упругого слоя конечной толщины к модели основания с двумя коэффициентами постели. Иначе говоря, задача ставится следующим образом: по заданным параметрам слоя  $E$ ,  $H$  и  $\nu$  требуется подобрать два коэффициента постели  $C_1$  и  $C_2$ , так, чтобы двухпараметрическая модель в каком-то смысле наилучшим образом приближала модель упругого слоя.

Предлагались различные подходы к решению указанной задачи, которые могли бы служить основой для выработки практических рекомендаций. Так, в работе [7] в качестве условий эквивалентности исходной и заменяющей моделей используются требования: равенство осадок симметрично нагруженного жесткого штампа для исходной и заменяющей модели и равенство реактивных давлений в средней точке этого же штампа. Эти требования позволяют однозначно определить характеристики двухпараметрического основания. Иной подход к вопросу об установлении приближенной эквивалентности моделей использован Барвашовым и Федоровским [8], по которому близость двух моделей понимается в смысле

близости соответствующих ядер. В силу того, что ядра трудно сопоставлять непосредственно, в [8] условие близости ядер заменяется условием близости их трансформант интегрального преобразования Ханкеля. Такой подход привлекателен тем, что в предельном случае (при полном совпадении трансформант) ядра исходной и заменяющей моделей также полностью совпадают, а, значит, полностью совпадают и решения соответствующих контактных задач. Недостатком такого подхода является то обстоятельство, что точный математический смысл меры близости трансформант и ядер при этом не устанавливается.

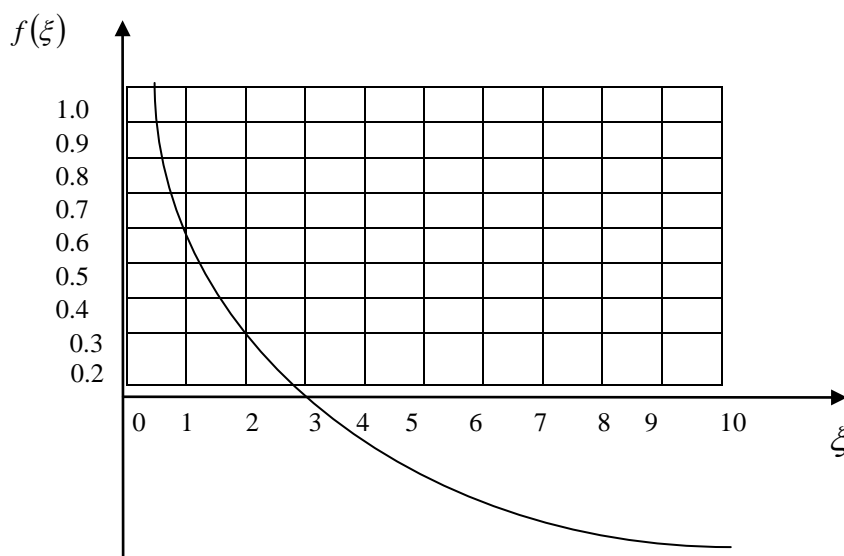


Рис. 2. График функции  $f(\xi)$

Попытка сопоставления двух моделей упругого основания, где в качестве меры близости выбирается близость этих моделей по энергии, была осуществлена в работе [7]. В результате выполненного исследования в [7] построен общий алгоритм, позволяющий на основе итерационного процесса установить значения параметров  $C_1$  и  $C_2$ , при которых гарантируется наилучшая в энергетическом смысле близость двух моделей упругого основания.

Оказалось, что наилучшие в указанном энергетическом смысле коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  зависят не только от параметров исходной модели, но также от размеров и формы конструкции в плане, а самое главное – от ее жесткости.

**Выводы.** Следовательно, для учета распределительной способности основания необходимо, во-первых, использовать модели основания, отличные от винклеровой и, во-вторых, ввести в расчетную схему те части основания, которые расположены за пределами фундаментной конструкции. Последнее необходимо потому, что работа усилий взаимодействия между конструкцией и упругим основанием уходит на накопление потенциальной энергии, запасаемой упругим основанием как в пределах площадки, занимаемой конструкцией, так и за ее пределами.

#### ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Перельмутер А. В., Сливкер В. И.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – К. : Сталь, 2002. – 600 с.
2. **Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И.** Расчет конструкций на упругом основании. – М. : Стройиздат, 1984. – 679 с.
3. **Колосова Г. С.** Расчет методом конечных элементов фундаментных плит на неограниченном двухпараметрическом основании // Метод конечных элементов и расчет сооружений. Тр. ЛПИ. – Л., 1985. – № 405. – С. 48 – 51.
4. **Пастернак П. Л.** Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М. – Л. : Госстройиздат, 1954. – 56 с.
5. **Швец Н. С., Седин В. Л., Киричек Ю. А.** Конструктивные способы снижения вибраций фундаментов машин с динамическими нагрузками. – М. : Стройиздат, 1987. – 133 с.

6. **Власов В. З.** Строительная механика тонкостенных пространственных систем. – М. : Стройиздат, 1949. – 434 с.

7. **Сливкер В. И.** К вопросу о назначении характеристик двухпараметрового упругого основания // Строительная механика и расчет сооружений. – 1981. – № 1. – С. 36 – 39.

8. **Барвашов В. А., Федоровский В. Г.** Трехпараметрическая модель грунтового основания и свайного поля, учитывающая необратимые структурные деформации грунта // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1978. – № 4. – С. 17 – 20.

УДК 657.012.43

### К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАМКАХ МОДЕЛИ ВОДОНАСЫЩЕННОГО ГРУНТОВОГО СЛОЯ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

*А. В. Шаповал, к. т. н., доц., А. С. Головки, к. т. н., доц., Е. С. Титякова, к. т. н., В. С. Андреев\*, к. т. н., доц.*

*\*Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. академика Лазаряна*

**Ключевые слова:** *граничные элементы, осадка, матрица, модель, фильтрационная консолидация, упругое водонасыщенное основание*

**Цель исследования:** В рамках модели упругого водонасыщенного основания получить формулы для коэффициентов (точнее, функций) влияния матрицы податливости для трех- и четырехугольных граничных элементов, а также для граничных элементов в виде кольцевого сектора [4; 6; 7].

**Изложение материала:** Задача решалась в рамках расчетной схемы основания в виде слоя конечной толщины.

В рамках расчетной схемы полупространства эта проблема решена авторами [6 – 8].

Указанный набор граничных элементов позволяет определить напряженно-деформированное состояние грунтового основания фундаментов с практически произвольной формой подошвы.

При нахождении функций влияния для описания процесса фильтрационной консолидации нами была использована теория старения [5; 8].

Задача исследований была сформулирована так.

Граничный элемент площадью  $D$  находится на грунтовом слое толщиной  $H$ , который характеризуется упругими техническими характеристиками  $E$  и  $\nu$  (или соответствующим им упругими константами Ламе  $\lambda$  и  $G$ ), а также коэффициентом пространственной консолидации  $C_v$  [1...6].

На этот элемент действует внешняя распределенная единичная нагрузка  $q = 1$ , которая остается неизменной во времени и приложена к рассматриваемому граничному элементу в момент времени  $t = 0$ .

Требуется определить функции влияния матрицы податливости  $B_{ij}(t)$  для граничных элементов в виде четырехугольника, треугольника и кольцевого сектора.

Напомним, что по определению под коэффициентом влияния понимают осадку точки основания с координатами  $(x_j, y_j)$ , обусловленную распределением по площади некоторой геометрической фигуры (т. е. либо четырехугольника, либо треугольника, либо кольцевого сектора и т. д.) с центром в точке с координатами  $(x_i, y_i)$  единичной нагрузкой  $q = 1$  [4].

Согласно [5], осадка упругого слоя толщиной  $H$  в точке с координатой  $r$  под воздействием сосредоточенной силы  $Q$  в момент времени  $t$  равна:

$$S(r, t) = \frac{1-\nu}{2 \cdot \pi \cdot G \cdot H} \cdot Q \cdot \int_0^{\infty} \left\{ \Omega(\alpha) - \frac{1-2 \cdot \nu}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \mathfrak{E}(\alpha, t) \right\} \cdot J_0\left(\alpha \cdot \frac{r}{H}\right) \cdot d\alpha, \quad (1)$$