6. **Власов В. З.** Строительная механика тонкостенных пространственных систем. – М. : Стройиздат, 1949. – 434 с.

7. **Сливкер В. И.** К вопросу о назначении характеристик двухпараметрового упругого основания // Строительная механика и расчет сооружений. – 1981. – № 1. – С. 36 – 39.

8. **Барвашов В. А., Федоровский В. Г.** Трехпараметрическая модель грунтового основания и свайного поля, учитывающая необратимые структурные деформации грунта // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1978. – № 4. – С. 17 – 20.

УДК 657.012.43

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАМКАХ МОДЕЛИ ВОДОНАСЫЩЕННОГО ГРУНТОВОГО СЛОЯ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

А. В. Шаповал, к. т. н., доц., А. С. Головко, к. т. н., доц., Е. С. Титякова, к. т. н., В. С. Андреев, к. т. н., доц.*

**Днепропертовский национальный университет железнодорожного транспорта им. академика Лазаряна*

Ключевые слова: *граничные элементы, осадка, матрица, модель, фильтрационная консолидация, упругое водонасыщенное основание*

Цель исследования: В рамках модели упругого водонасыщенного основания получить формулы для коэффициентов (точнее, функций) влияния матрицы податливости для трех- и четырехугольных граничных элементов, а также для граничных элементов в виде кольцевого сектора [4; 6; 7].

Изложение материала: Задача решалась в рамках расчетной схемы основания в виде слоя конечной толщины.

В рамках расчетной схемы полупространства эта проблема решена авторами [6 – 8].

Указанный набор граничных элементов позволяет определить напряженно-деформированное состояние грунтового основания фундаментов с практически произвольной формой подошвы.

При нахождении функций влияния для описания процесса фильтрационной консолидации нами была использована теория старения [5; 8].

Задача исследований была сформулирована так.

Граничный элемент площадью D находится на грунтовом слое толщиной H, который характеризуется упругими техническими характеристиками E и ν (или соответствующим им упругими константами Ламе λ и G), а также коэффициентом пространственной консолидации C_V [1…6].

На этот элемент действует внешняя распределенная единичная нагрузка $q=1$, которая остается неизменной во времени и приложена к рассматриваемому граничному элементу в момент времени $t=0$.

Требуется определить функции влияния матрицы податливости $B_{ij}(t)$ для граничных элементов в виде четырехугольника, треугольника и кольцевого сектора.

Напомним, что по определению под коэффициентом влияния понимают осадку точки основания с координатами (x_j, y_j), обусловленной распределением по площади некоторой геометрической фигуры (т. е. либо четырехугольника, либо треугольника, либо кольцевого сектора и т. д.) с центром в точке с координатами (x_i, y_i) единичной нагрузкой $q = 1$ [4].

Согласно [5], осадка упругого слоя толщиной H в точке с координатой r под воздействием сосредоточенной силы Q в момент времени t равна:

$$S(r,t)=\frac{1-\nu}{2\cdot\pi\cdot G\cdot H}\cdot Q\cdot\int_0^{\infty}\left\{\Omega(\alpha)-\frac{1-2\cdot\nu}{2\cdot(1-\nu)}\cdot\Omega(\alpha,t)\right\}\cdot J_0(\alpha\cdot\frac{r}{H})\cdot d\alpha, \qquad (1)$$

где $\Omega(\alpha)=\dfrac{sh^2(\alpha)}{\alpha+sh(\alpha)\cdot ch(\alpha)}$; $\tilde{\Omega}(\alpha,t)=4\cdot\tilde{\Omega}(\alpha)\cdot\tilde{\Omega}_1(\alpha,t)$; $\tilde{\Omega}(\alpha)=\dfrac{sh^2(\alpha)\cdot\alpha\cdot[1+ch(\alpha)]^2}{[\alpha+sh(\alpha)\cdot ch(\alpha)]^2}$

$$;\ \tilde{\Omega}_1(\alpha,t)=\sum_{i=1,3,5}^{\infty}\left\{\frac{(i\cdot\pi)^2}{\left[\alpha^2+(i\cdot\pi)^2\right]^2}\cdot exp\left[-\frac{\alpha^2+(i\cdot\pi)^2}{H^2}\cdot c_v\cdot t\right]\right\}.$$

Здесь Q – величина сосредоточенной силы; H – толщина слоя; G, ν и c_v – соответственно модуль сдвига, коэффициенты Пуассона и пространственной консолидации основания [6; 7]; α – безразмерный параметр; $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода с нулевым индексом [6]; $sh(x)$ и $ch(x)$ – соответственно гиперболические синус и косинус [2]; r и t – соответственно координата и время.

Равенство (1) содержит несобственный интеграл, в силу чего его использование в качестве фундаментального решения возникают проблемы вычислительного характера. Поэтому для определения функций влияния используем полученную аппроксимацию (1):

$$S(r,t)=\frac{(1-\nu)\cdot Q}{2\cdot\pi\cdot G\cdot H}\cdot\int_0^{\infty}\Omega(\alpha)\cdot J_0(\alpha\cdot\frac{r}{H})\cdot d\alpha\approx \tag{2}$$

$$\approx\frac{(1-\text{н})\cdot Q}{2\cdot\text{р}\cdot G}\cdot\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{10}A_i\cdot\text{ч}_i(r)-\\ \dfrac{1-2\cdot\text{н}}{2\cdot(1-\text{н})}\cdot\sum\limits_{i=1}^{10}\sum\limits_{j=1}^{10}\sum\limits_{m=1}^{10}\sum\limits_{k=1}^{10}D_{ijkm}\cdot\text{ші}_{jkm}(r,t)\end{array}\right\},$$

где $D_{ijkm}=A_i\cdot B_j\cdot C_{km}$; $\chi(r)=\dfrac{1}{\sqrt{r^2+(i-1)^2\cdot d_a{}^2\cdot H^2}}$;

$$\psi_{ijkm}(r)=\frac{exp\left[-\dfrac{(2\cdot m-1)^2\cdot\pi^2\cdot c_v\cdot t}{H^2}\right].}{\sqrt{r^2+\left[(i-1)\cdot d_a+(j-1)\cdot d_b\cdot\dfrac{\sqrt{c_v\cdot t}}{H}+(k-1)\cdot d_m\right]^2\cdot H^2}}.$$

Здесь $D_{ijkm}=A_i,B_j,C_{km},d_a,d_b$ и d_m – полученные коэффициенты и константы аппроксимации.

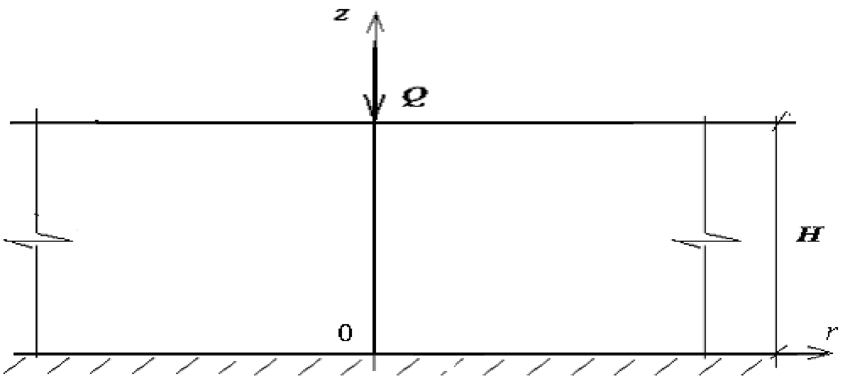

Рис. 1. Расчетная схема слоя конечной толщины

Вначале рассмотрим случай прямоугольного граничного элемента с размерами сторон L и B, на который действует распределенная нагрузка $q=1$ (рис. 2).

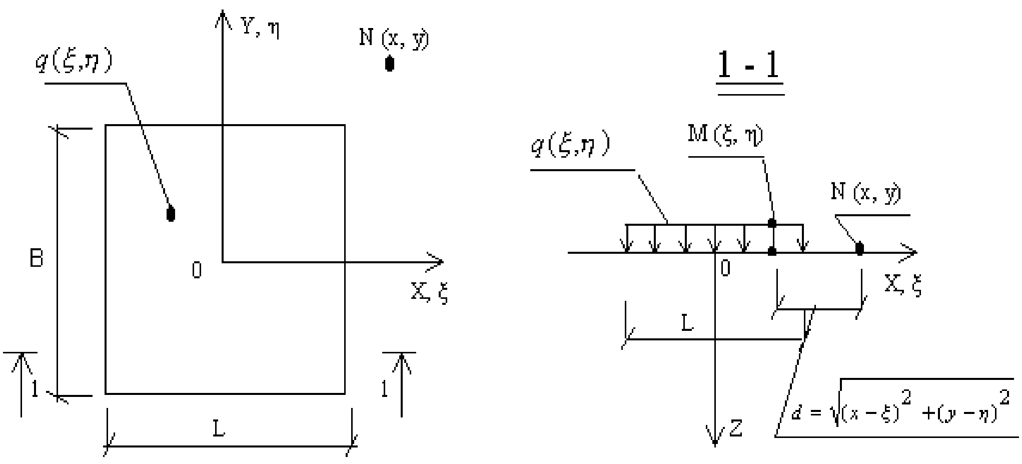

Рис. 2. К определению коэффициента влияния матрицы податливости для прямоугольного граничного элемента

Найдем осадку дневной поверхности *S*(x, y)* точки основания с координатами (*x*, *y*) от элементарной нагрузки $dQ(\xi,\eta)=q\cdot d\xi\cdot d\eta$, приложенной в точке с координатами (ξ,η) (см. рис. 2). В этом случае в формуле (2) радиус следует положить равным $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$) и проинтегрировать полученное выражение по координате ξ в пределах от $-\frac{L}{2}$ до $+\frac{L}{2}$. Кроме того, полученный таким образом результат следует проинтегрировать полученное выражение по координате η в пределах от $-\frac{b}{2}$ до $+\frac{b}{2}$ (рис.2). Имеем:

$$S(x,y)\approx\frac{(1-\nu)\cdot q}{2\cdot\pi\cdot G}\cdot\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{10}A_i\cdot\chi_i^*(x,y,\xi,\eta)-\frac{1-2\cdot\nu}{2\cdot(1-\nu)}\cdot\\ \cdot\sum\limits_{i=1}^{10}\sum\limits_{j=1}^{10}\sum\limits_{m=1}^{10}\sum\limits_{k=1}^{10}D_{ijkm}\cdot\psi_{ijkm}^*(x,y,\xi,\eta,t)\end{array}\right\}\cdot d\xi\cdot d\eta, \quad (3)$$

где $\chi_i^*(x,y,\xi,\eta)=\dfrac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(i-1)^2\cdot {d_a}^2\cdot H^2}}$;

$$\psi_{ijkm}^*(x,y,\xi,\eta,t)=\frac{zi(t)}{zn(x,y,\xi,\eta,t)};\quad zi(t)=exp\left[-\frac{(2\cdot m-1)^2\cdot\pi^2\cdot c_v\cdot t}{H^2}\right];$$

$$zn(x,y,\xi,\eta,t)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\left[(i-1)\cdot d_a+(j-1)\cdot d_b\cdot\frac{\sqrt{c_v\cdot t}}{H}+(k-1)\cdot d_m\right]^2\cdot H^2}$$

Далее определим функции влияния матрицы податливости метода граничных элементов $B_{ij}(t)$. В рассматриваемом случае с физической точки зрения функция влияния матрицы податливости $B_{ij}(t)$ является осадкой точки основания с координатами (x_j,y_j), обусловленной распределенной по площади прямоугольника с размерами сторон в плане b_i и L_i и центром в точке с координатами (x_i,y_i) единичной нагрузкой $q=1$ в момент времени t.

Поместим центр загруженной области в точку с координатами (x_i,y_i) и найдем осадку точки с координатами (x_i,y_i). При этом примем размеры загруженной области равными b_i и L_i, а распределенную нагрузку q равной единице. Кроме того, положим нагрузку неизменной во времени. Имеем:

$$B_{ij}(t)\approx\frac{(1-\text{н})}{2\cdot \text{р}\cdot G}\cdot\int\limits_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{i_1=1}^{10}A_{i_1}\cdot \text{ч}^*_{i_1}(i,j,\text{о},j)-\frac{1-2\cdot \text{н}}{2\cdot(1-\text{н})}\cdot \\ \cdot\sum\limits_{i_1=1}^{10}\sum\limits_{j_1=1}^{10}\sum\limits_{m=1}^{10}\sum\limits_{k=1}^{10}D_{i_1j_1km}\cdot \text{ш}^*_{i_1j_1km}(i,j,\text{о},j,\text{о})\end{array}\right\}\cdot d\text{о}\cdot d\text{з}$$

где $$\chi^*_{i_1}(i,j,\xi,\eta)=\frac{1}{\sqrt{(x_i-x_j-\xi)^2+(y_i-y_j-\eta)^2+(i_1-1)^2\cdot d_a{}^2\cdot H^2}};\qquad(4)$$

$$\text{ш}^*_{i_1j_1km}(i,j,\text{о},j,\text{о})=\frac{zi(t)}{zn(i,j,\text{о},j,\text{о})};\quad zi(t)=exp\left[-\frac{(2\cdot m-1)^2\cdot\pi^2\cdot c_v\cdot t}{H^2}\right];$$

$$zn(i,j,\xi,\eta,t)=\sqrt{\begin{array}{l}(x_i-x_j-\xi)^2+(y_i-y_j-\eta)^2+\\+\left[(i_1-1)\cdot d_a+(j_1-1)\cdot d_b\cdot\frac{\sqrt{c_v\cdot t}}{H}+(k-1)\cdot d_m\right]^2\cdot H^2\end{array}}.$$

Интегралы (4) для каждого момента времени t целесообразно вычислять методом трапеций. При этом первый интеграл по переменной η вычислялся аналитически.

В случае треугольного граничного элемента (рис. 3) функция влияния матрицы податливости $B_{ij}(t)$ с физической точки зрения является осадкой точки основания с координатами (x_j, y_j), которая обусловлена единичной постоянной во времени нагрузкой $q = 1$, распределенной по площади треугольника с координатами вершин (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) и центром в точке с координатами (x_i, y_i) в момент времени t.

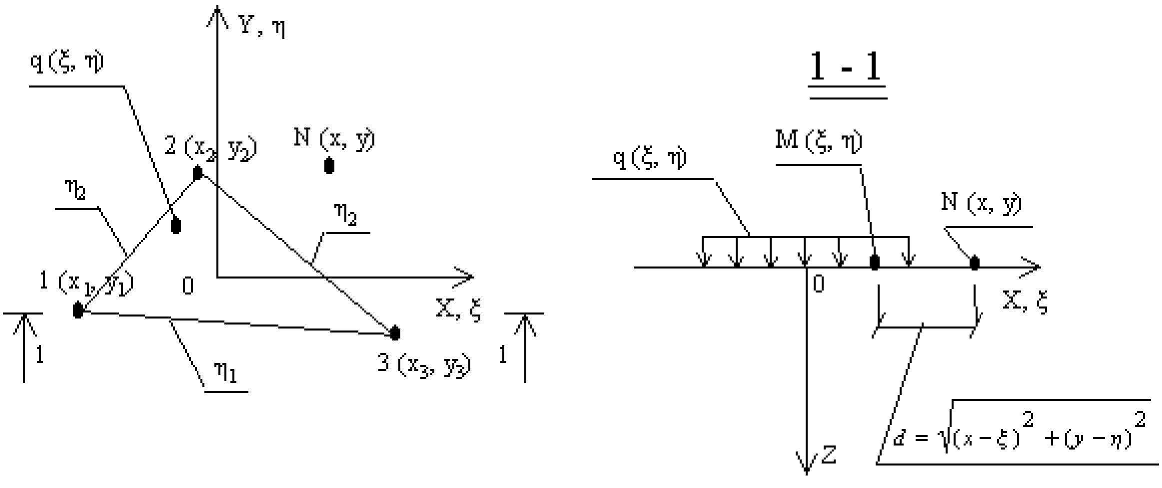

Рис. 3. К определению коэффициента влияния матрицы податливости треугольного граничного элемента

Техника определения функций влияния в целом такая же, как и для прямоугольного элемента. Отличие заключается в том, что в данном случае верхний и нижний пределы интегрирования по переменной η являются функциями координаты ξ, т. е.:

$$\eta_1=\left[U(\xi-x_1)-U(\xi-x_3)\right]\cdot\left[y_1+\frac{(y_3-y_1)\cdot(\xi-x_1)}{x_3-x_1}\right]\text{ и}$$

$$\eta_2 = \left[U(\xi - x_1) - U(\xi - x_2)\right] \cdot \left[y_1 + \frac{(y_2 - y_1)\cdot(\xi - x_1)}{x2 - x1} \right] +$$

$$+ \left[U(\xi - x_2) - U(\xi - x_3)\right] \cdot \left[y_2 + \frac{(y_3 - y_2)\cdot(\xi - x_2)}{x_3 - x_2} \right], \tag{5}$$

где $U(x)$ – ступенчатая единичная функция Хевисайда [7], а (x_1,y_1), (x_2,y_2) и (x_3,y_3) – координаты вершин треугольника (т. е. загруженной области), причем $x_1 \le x_2 \le x_3$.

В связи с изложенным имеем:

$$B_{ij}(t) \approx \frac{(1-\nu)}{2\cdot\pi\cdot G} \cdot \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{x_1}^{x_3} \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{i_1=1}^{10} A_{i_1} \cdot \chi^*_{i_1}(i,j,\xi,\eta) - \frac{1-2\cdot\nu}{2\cdot(1-\nu)} \cdot \\ \cdot \sum\limits_{i_1=1}^{10} \sum\limits_{j_1=1}^{10} \sum\limits_{m=1}^{10} \sum\limits_{k=1}^{10} D_{i_1 j_1 km} \cdot \psi^*_{i_1 j_1 km}(i,j,\xi,\eta,t) \end{array} \right\} \cdot d\xi \cdot d\eta, \tag{6}$$

где A_{i_1} *и* $D_{i_1 j_1 km}$ – см. пояснения к формуле (2), а $\chi^*_{i_1}(i,j,\xi,\eta)$ и $\psi^*_{i_1 j_1 km}(i,j,\xi,\eta,t)$ – см. пояснения к формуле (4).

Для граничного элемента в виде неправильного многоугольника (рис. 4); такие элементы используются с вычислительных комплексах «Лира» и «Мономах». Коэффициенты влияния матрицы податливости B_{ij} найдем в виде:

$$B_{ij}(t) \approx \frac{(1-н)}{2\cdot p\cdot G} \cdot \int_{з_1}^{з_2} \int_{x_1}^{x_3} \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{i_1=1}^{10} A_{i_1} \cdot ч^*_{i_1}(i,j,о,j) - \frac{1-2\cdot н}{2\cdot(1-н)} \cdot \\ \cdot \sum\limits_{i_1=1}^{10} \sum\limits_{j_1=1}^{10} \sum\limits_{m=1}^{10} \sum\limits_{k=1}^{10} D_{i_1 j_1 km} \cdot ш^*_{i_1 j_1 km}(i,j,о,j,о) \end{array} \right\} \cdot dо \cdot dз \tag{7}$$

где A_{i_1} *и* $D_{i_1 j_1 km}$ – см. пояснения к формуле (2), а $ч^*_{i_1}(i,j,о,j)$ и $ш^*_{i_1 j_1 km}(i,j,о,j,о)$ – см. пояснения к формуле (4).

Здесь $з_1 = \left[U(о - x_1) - U(о - x_4)\right] \cdot \left[y_1 + \frac{(y_4 - y_1)\cdot(о - x_1)}{x_4 - x_1} \right] +$

$$+ \left[U(о - x_4) - U(о - x_3)\right] \cdot \left[y_4 + \frac{(y_3 - y_4)\cdot(о - x_4)}{x_3 - x_4} \right]$$

и $з_2 = \left[U(о - x_1) - U(о - x_2)\right] \cdot \left[y_1 + \frac{(y_2 - y_1)\cdot(о - x_1)}{x_2 - x_1} \right] +$

$$+ \left[U(\xi - x_2) - U(\xi - x_3)\right] \cdot \left[y_2 + \frac{(y_3 - y_2)\cdot(\xi - x_2)}{x_3 - x_2} \right],\ x_1 \le x_2 \le x_4 \le x_3.$$

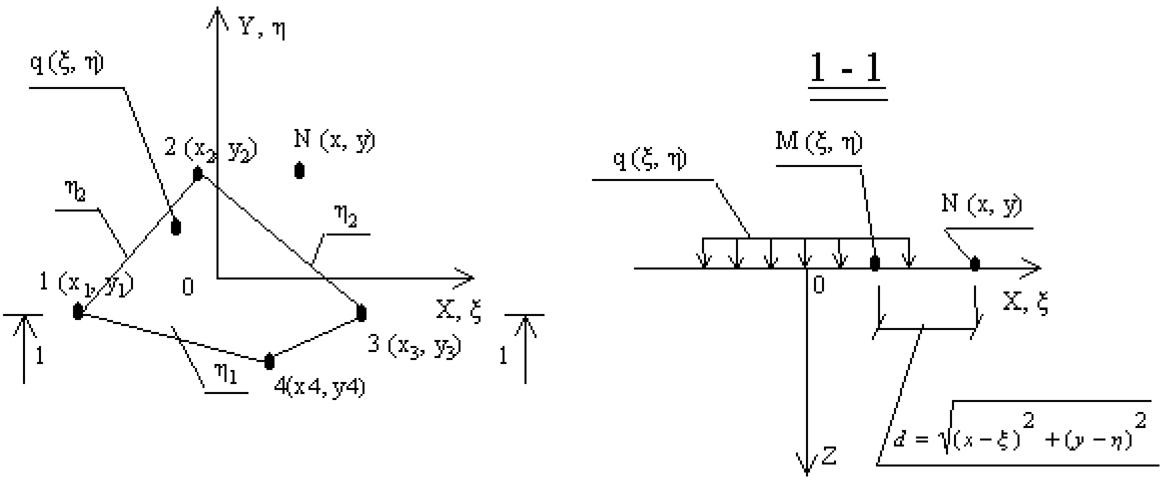

Рис. 4. К определению коэффициента влияния матрицы податливости для граничного элемента в виде неправильного многоугольника

С физической точки зрения в рассматриваемом случае функция влияния матрицы податливости $B_{ij}(t)$ является осадкой точки основания с координатами (x_j, y_j), обусловленной распределенной по площади четырехугольника с координатами вершин (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) и центром в точке с координатами (x_i, y_i) единичной постоянной во времени нагрузкой q.

Для граничного элемента в виде кольцевого сектора при определении коэффициентов влияния матрицы податливости B_{ij} следует перейти от декартовой к полярной системе координат (рис. 5).

В данном случае под коэффициентом влияния следует понимать осадку точки *M*, положение которой определяется вектором длиной b, наклоненным к горизонтали под углом β под воздействием распределенной по площади кольцевого сектора *abcd* единичной постоянной во времени нагрузки. При этом положение центра граничного элемента *abcd* определяется вектором длиной ρ, наклоненным к горизонтали под углом φ, а расстояние между центром граничного элемента и точкой *M* равно:

$$r = \sqrt{\rho^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot \rho \cdot \cos(\varphi)}\,. \tag{8}$$

Далее подставим (8) в (2) и проинтегрируем полученное таким образом выражение в по координате ρ в пределах от $R1,j$ до $R2,j$, а по координате φ – в пределах от $\varphi_{1,j}$ до $\varphi_{2,j}$. Имеем:

$$B_{ij}(t) \approx \frac{(1-\nu)}{2 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int_{\varphi_{1,j}}^{\varphi_{2,j}} \int_{R_{1,j}}^{R_{2,j}} \left\{ \begin{matrix} \sum\limits_{i_1=1}^{10} A_{i_1} \cdot \chi_{i_1}^{**}(i,j,\rho,\varphi) - \dfrac{1-2\cdot\nu}{2\cdot(1-\nu)} \cdot \\ \cdot \sum\limits_{i_1=1}^{10} \sum\limits_{j_1=1}^{10} \sum\limits_{m=1}^{10} \sum\limits_{k=1}^{10} D_{i_1 j_1 km} \cdot \psi_{i_1 j_1 km}^{**}(i,j,\rho,\varphi,t) \end{matrix} \right\} \cdot d\xi \cdot d\eta\,, \tag{9}$$

где A_{i_1} и $D_{i_1 j_1 km}$ – см. пояснения к формуле (2); (9)

$$\chi_{i_1}^{**}(i,j,\rho,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + b_i^2 - 2 \cdot b_i \cdot \rho \cdot \cos\cdot(\varphi) + [(k-1) \cdot d_a \cdot H]^2}}\,;$$

$$\psi_{i_1 j_1 km}^{**}(i,j,\rho,\varphi,t) = \frac{zi^*(t)}{zn^*(i,j,\rho,\varphi,t)}\,;\ zi^*(t) = \exp\left[-\frac{(2\cdot m-1)^2 \cdot \pi^2 \cdot c_v \cdot t}{H^2}\right];$$

$$zn^{*}(i,j,\rho,\varphi,t)=\sqrt{\begin{aligned}&\rho^{2}+b_{i}^{2}-2\cdot b_{i}\cdot\rho\cdot cos\cdot(\varphi)+\\&+\left[(i_{1}-1)\cdot d_{a}+(j_{1}-1)\cdot d_{b}\cdot\frac{\sqrt{c_{v}\cdot t}}{H}+(k-1)\cdot d_{m}\right]^{2}\cdot H^{2}\end{aligned}}\,.$$

Интегралы (9) целесообразно вычислять методом трапеций. При этом первый интеграл по переменной ρ целесообразно вычислять аналитически.

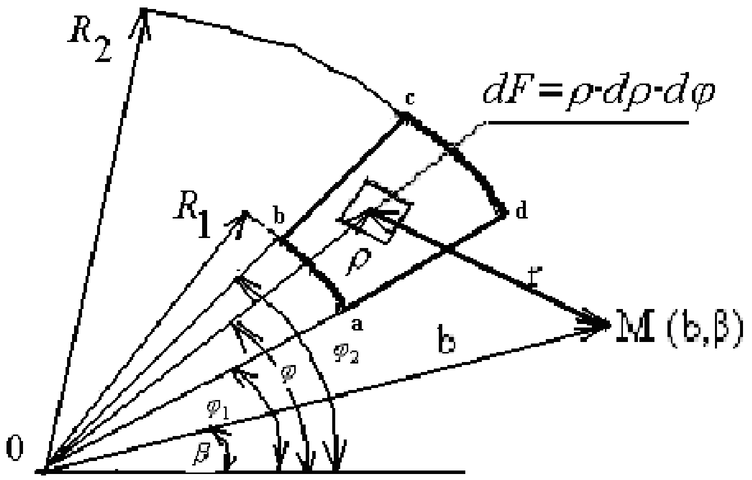

Рис. 5. К определению коэффициента влияния матрицы податливости для граничного элемента в виде кольцевого сектора

Выводы. В целом полученные в ходе выполнения настоящей работы коэффициенты влияния матрицы податливости метода граничных элементов в рамках модели основания в виде линейного упругого изотропного водонасыщенного слоя конечной толщины решать такие задачи проектирования:

- определение напряженно-деформированного состояния грунтовых оснований, находящихся под воздействием приложенной к их верхней границе распределенной нагрузки;
- определение напряженно-деформированного состояния систем «грунтовое основание – фундамент»;
- определение напряженно-деформированного состояния систем «грунтовое основание – фундамент – надфундаментное строение».

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Демидович Б. П., Марон И. А.** Основы вычислительной математики. – М. : Наука, 1966. – 664 с.
2. **Зарецкий Ю. К.** Теория консолидации грунтов. – М. : Наука, 1967. – 270 с.
3. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. – М. : Наука, 1974. – 840 с.
4. **Крауч С., Старфилд А.** Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М. : Мир, 1987. – 328 с.
5. **Новацкий В.** Теория упругости. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
6. **Шаповал А. В.** Алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния обладающих свойством ползучести водонасыщенных грунтовых оснований методом граничных элементов // Будівельні конструкції: Міжвідом. наук.-тех. зб. – Вип. 65. – К. : НДІБК, 2006. – С. 305 – 310.
7. **Шаповал А. В., Шаповал В. Г., Капустин В. В.** Метод граничных элементов в задачах определения НДС водонасыщенных грунтовых оснований, обладающих свойством ползучести. // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Вип. 14. – Д. : вид ДНУЗТ, 2007. – С. 220 – 224.
8. **Шаповал А. В.** Особливості взаємодії водонасичених основ, що мають властивість повзучості, з будинками і спорудами. Автореф. канд. дис. – Д. : ПДАБА, 2007. – 24 с.