УДК 624.04

УТОЧНЕННЯ ДО СТІЙКОСТІ ДЕФОРМОВАНИХ СИСТЕМ

БОГОМАЗ В. М.[1*], *к. ф.-м. н.*,
БОНДАРЕНКО Л. М.[2*], *к. т. н., доц.*,
ЩЕКА І. М.[3], *к. т. н., доц.*,
ПРИЙМАК М. В.[4], *студ.*

[1*]Кафедра військової підготовки, Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, 49010, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (056) 793-19-09, e-mail: wbogomas@i.ua, ORCID ID: 0000-0001-5913-2671
[2*] Кафедра прикладної механіки, Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, 49010, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (056) 373-15-18, e-mail: bondarenko-l-m2015@yandex.ua, ORCID ID: 0000-0002-2212-3058
[3] Кафедра військової підготовки, Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, 49010, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (056) 793-19-09, e-mail: shcheka1961@mail.ru, ORCID ID: 0000-0002-4608-3898
[4] Кафедра прикладної механіки, Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, 49010, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (056) 373-15-18, e-mail: nikolai-priimak@yandex.ua, ORCID ID: 0000-0002-5605-4484

Анотація. *Постановка проблеми.* На стадії проектування деталей машин та інженерних споруд обов’язково перевіряються умови міцності, жорсткості та стійкості. Виконання умови стійкості гарантує стан рівноваги елементів машин та систем. Проблема стійкості круглих тіл, які спираються на інші опуклі тіла, є досить актуальною в розділах механіки деформованого тіла. В існуючих наукових працях, присвячених такій проблемі, не враховується деформація тіл у місці контакту, а отже, не береться до уваги опір кочення між тілами. Урахування впливу опору кочення при дослідженні рівноважного стану тіл дає можливість більш точного визначення граничного положення їх рівноваги. ***Мета.*** Вдосконалити та узагальнити методику розрахунку стійкості кулі (циліндру) на опуклих поверхнях, використовуючи результати аналізу впливу фізико-механічних характеристик матеріалів та геометричних розмірів тіл, що контактують, на граничне положення їх рівноваги. ***Висновок.*** Проведені дослідження показали, що врахування реальних геометричних параметрів та фізико-механічних характеристик матеріалів при розгляді рівноважного стану кулі або циліндра на опуклих поверхнях збільшує кут рівноваги, причому максимальна величина кута при одних і тих же радіусах, схемах дотику “куля–куля”, “куля–циліндр”, “циліндр–циліндр” однакова. Приведені графіки залежності максимального кута відхилення кулі з урахуванням її стійкості від радіуса центра ваги кулі або циліндру.

Ключові слова: *куля, стійкість, деформація, кут рівноваги, тертя кочення*.

УТОЧНЕНИЕ К УСТОЙЧИВОСТИ ДЕФОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ

БОГОМАЗ В. Н.[1*], *к. ф.-м. н.*
БОНДАРЕНКО Л. Н.[2*], *к. т. н., доц.*
ЩЕКА И. Н.[3], *к. т. н., доц.*
ПРИЙМАК Н. В.[4], *студ.*

[1*] Кафедра военной подготовки, Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, 49010, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (056) 793-19-09, e-mail: wbogomas@i.ua, ORCID ID: 0000-0001-5913-2671
[2*]Кафедра прикладной механики, Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, 49010, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (056) 373-15-18, e-mail: bondarenko-l-m2015@yandex.ua, ORCID ID: 0000-0002-2212-3058
[3.]Кафедра военной подготовки, Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, 49010, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (056) 793-19-09, e-mail: shcheka1961@mail.ru, ORCID ID: 0000-0002-4608-3898
[4] Кафедра прикладной механики, Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, 49010, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (056) 373-15-18, e-mail: nikolai-priimak@yandex.ua, ORCID ID: 0000-0002-5605-4484

Аннотация. *Постановка проблемы.* На стадии проектирования деталей машин и инженерных сооружений обязательно проверяются условия прочности, жесткости и устойчивости. Выполнение условия устойчивости гарантирует состояние равновесия элементов машин и систем. Проблема устойчивости круглых тел, которые опираются на другие выпуклые тела, является достаточно актуальной в разделах механики деформированного тела. В существующих научных трудах, посвященных такой проблеме, не учитывается деформация тел в месте контакта, а следовательно, не берется во внимание сопротивление качения между телами. Учет влияния сопротивления качения при исследовании равновесного состояния тел дает возможность более точного определения предельного положения их равновесия. ***Цель.*** Усовершенствовать и обобщить методику расчета устойчивости шара (цилиндра) на выпуклых поверхностях, используя результаты анализа влияния физико-механических характеристик материалов и геометрических размеров тел, которые контактируют, на предельное положение их равновесия. ***Вывод.*** Проведенные исследования показали, что учет реальных геометрических параметров и физико-механических характеристик материалов при рассмотрении равновесного состояния шара или цилиндра на выпуклых поверхностях увеличивает угол равновесия, причем максимальная величина угла при одних и тех же радиусах и схемах касания шар–шар, шар–цилиндр, цилиндр–цилиндр одинаковая. Приведенные графики зависимости максимального угла отклонения шара с учетом его устойчивости от радиуса центра массы шара или цилиндра.

Ключевые слова: *шар, устойчивость, деформация, угол равновесия, трение качения*.

CLARIFICATION TO STABILITY OF THE DEFORMED SYSTEMS

BOHOMAZ V. M.[1*], Cand. Phys. Math. Sci.,
BONDARENKO L. M.[2*], Cand. Tech. Sci, As. Prof.,
SHCHEKA I. M.[3], Cand. Tech. Sci, As. Prof.,
PRIJMAK M. V.[4], Stud.

[1*]Dep. «Military Preparation», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 793-19-09, e-mail wbogomas@i.ua, ORCID 0000-0001-5913-2671

[2*]Dep. «Applied Mechanics», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373-15-18, e-mail bondarenko-l-m2015@yandex.ua, ORCID 0000-0002-2212-3058

[3*]Dep. «Military Preparation», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 793-19-09, e-mail: shcheka1961@mail.ru, ORCID ID: 0000-0002-4608-3898

[4*]Dep. «Applied Mechanics», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 18, e-mail: nikolai-priimak@yandex.ua, ORCID ID:0000-0002-5605-4484

Annotation.***Statement of the problem.*** At the design stage of machine parts and engineering structures necessarily validated terms of strength, stiffness and stability. The execution conditions for the stability guarantees a state of equilibrium of machine elements and systems. The problem of stability of circular bodies, which rely on other convex body is quite topical in the areas of mechanics of the deformed body. In existing scientific works devoted to this problem, is not taken into account deformation of the bodies in contact, and consequently, not taken into account the rolling resistance between the bodies. Taking into account the influence of the rolling resistance in the study of equilibrium of bodies enables more accurate determination of the limiting position of equilibrium. ***Purpose.***To improve and generalize the method of calculation of stability ball (cylinder) on convex surfaces, using the results of the analysis of the influence of physico-mechanical characteristics of the material and geometry of the bodies which are in contact, to limit their equilibrium position. ***Conclusion***. Studies have shown that taking into account the real geometrical parameters and physical-mechanical characteristics of materials when considering the equilibrium state of a ball or cylinder on convex surfaces increases the angle of equilibrium, and the maximum value of the angle at the same radii and diagrams touch the ball–ball, ball–cylinder, cylinder–cylinder is the same. The dependences of the maximum deflection angle of the ball with its stability on the radius of the center of mass of the ball or cylinder.

Key words*:* *ball, stability, deformation, corner of equilibrium, rolling resistance.*

Постановка проблеми. На стадії проектування деталей машин та інженерних споруд обов’язково перевіряються умови міцності, жорсткості та стійкості. Виконання умови стійкості гарантує стан рівноваги елементів машин та систем. Проблема стійкості круглих тіл, які спираються на інші опуклі тіла, є досить актуальною в розділах механіки деформованого тіла.

В існуючих наукових працях [2; 4; 5; 7; 8; 10–13], присвячених такій проблемі, не враховується деформація тіл у місці контакту, а отже, не береться до уваги опір кочення між тілами. Урахування впливу опору кочення при дослідженні рівноважного стану тіл дає можливість більш точного визначення граничного положення їх рівноваги.

Положення кулі, яка знаходиться на іншій кулі, вважається нестійким, оскільки після відхилення меншої кулі від стану рівноваги вона почне віддалятися від стійкого середнього положення (рис. 1). При цьому припускається, що центр ваги меншої кулі співпадає з її геометричним центром.

Цей приклад наводиться перед розглядом стійкості деформованих систем [3], а нестійкість їх можлива тільки у випадку наявності сили, яка б перевищувала критичну величину, тому такий приклад на ідеальних кулях не є зовсім коректним. Більш точним буде приклад стійкості таких куль зі зміщеним центром ваги. Така задача класична (ефект «Івана-покивана»), але дещо некоректна тим, що не враховуються деформації в місці контакту, а отже, опір кочення однієї кулі по іншій.

Для іграшок це припустимо, оскільки контактні напруження в них завідома нижчі допустимих, але ж для реальних складних конструктивних елементів (об'єктів) величина напружень може бути значною, або досягати допустимих значень.

Мета статті. Завдання дослідження полягає в аналізі впливу механічних характеристик матеріалів на граничне положення рівноваги кулі або циліндра на опуклих поверхнях.

Виклад матеріалу. Розв'язання задачі про стійке положення меншої кулі на іншій кулі, якщо не враховувати опір коченню кулі по кулі, зводиться до знаходження такого положення центра ваги, коли відстань OC = $O_1C_1 = r_C$ буде більша відстані OB = r_B. Перша (OC) дорівнює відстані від геометричного центру кулі до центру ваги, а друга (O_1C_1) – від центру ваги до вертикалі, проведеної з точки контакту A.

У реальному випадку реакція буде прикладена дещо правіше точки A і це відхилення може бути знайдене через величину коефіцієнта тертя-кочення k.

Якщо розглянути трикутник OAB, то можна довести, що

$$\frac{r_B}{\sin\beta} = \frac{r}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} = \frac{r}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{r}{\sin[\alpha(1+r/R)]},$$

або

$$OB = r_B = \frac{r^2}{r+R}. \quad (1)$$

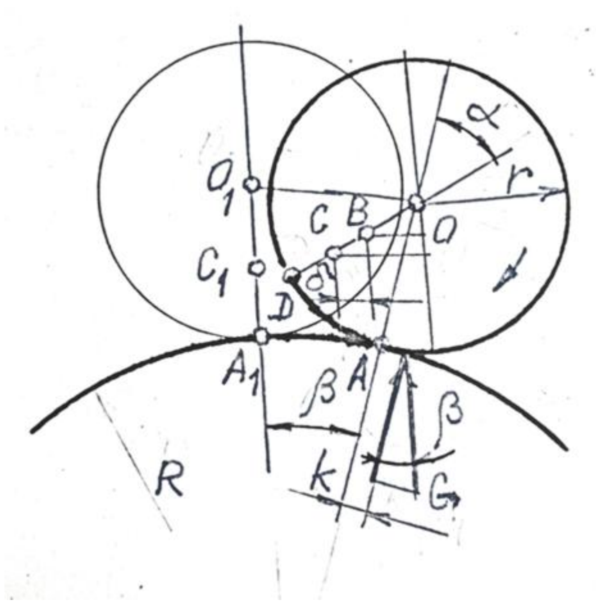

Рис. 1. Схема до визначення стійкої рівноваги

Оскільки дуги AD і AA_1 рівні, то

$$\beta = \alpha\frac{r}{R}. \quad (2)$$

Складаємо суму моментів сил відносно точки A:

$$G\delta + kG\cos\beta = 0. \quad (3)$$

Приймаючи до уваги, що значення кутів α і β досить малі, можна записати:

$$\sin\beta \approx \beta, \sin\ \alpha\left(1 + {}^{r}/_{R}\right)\big] \approx \alpha\left(1 + {}^{r}/_{R}\right).$$

Величину δ знайдемо з трикутників OBB' та OOC'

$$\delta = (\alpha+\beta)\left(r_C - \frac{r^2}{r+R}\right). \quad (4)$$

Формулу (3) запишемо у вигляді:

$$(\alpha+\beta)\left(r_C - \frac{r^2}{r+R}\right) + k\beta = 0. \quad (5)$$

Рівняння (5) можливе, коли $\beta = \infty$, що тривіально, або

$$k = (\alpha+\beta)\left(\frac{r^2}{r+R} - r_C\right). \quad (6)$$

Стійким буде положення, коли величина k перевершить праву частину рівняння, тобто:

$$k > (\alpha+\beta)\left(\frac{r^2}{r+R} - r_C\right). \quad (6a)$$

а при рівності (6) положення меншої кулі буде вільним.

У випадку, коли $k = 0$, виконується рівність

$$r_C = \frac{r^2}{r+R},$$

а положення кулі буде стійким при

$$r_c > \frac{r^2}{r+R}.$$

Знайдемо залежність між кутом β та величиною r_c, при якій положення малої кулі буде стійким на кулі, циліндрі; крім того розглянемо цей же приклад для двох циліндрів довжиною B і з такими ж радіусами r та R.

Для встановлення аналітичних залежностей між r_c та β, як видно з (6) та (6а) необхідно мати і дані щодо коефіцієнта тертя-кочення. Така залежність знайдена у працях [1] і [14]. Вона встановлює зв’язок між статичною півшириною плями контакту і коефіцієнтом k.

Згідно з працею [1] коефіцієнт тертя кочення визначається такими рівностями:

- при початковому точковому контакту:

$$k = 0.16be^{0.2r}; \tag{7}$$

- при початковому лінійному контакті:

$$k = 0{,}225be^{-1.2r}. \tag{8}$$

У випадку однакових модулів пружності при вдавлюванні та при величині модуля пружності, рівній 0,3, півширини плям контакту [5; 9] визначаються залежностями:

- при двох кулях:

$$b_{кк} = \frac{1.109}{2}\sqrt[3]{\frac{G}{E}\frac{rR}{r+R}}; \tag{9}$$

- при кулі та циліндрі

$$b_{кц} = \frac{1.397}{2}n_b\sqrt[3]{\frac{G}{E}\frac{rR}{r+2R}}, \tag{9a}$$

де n_b – коефіцієнт, який залежить від відношення коефіцієнтів еліпса дотику

$$A_B = ((1/r + 1/R))/r;$$

- двох циліндрів:

$$b_{цц} = \frac{1.522}{2}\sqrt{\frac{G}{BE}\frac{rR}{r+R}}. \tag{9b}$$

Відповідні цим величинам значення коефіцієнтів тертя кочення:

$$b_{кк} = 0.09\sqrt[3]{\frac{G}{E}\frac{rR}{r+R}}e^{0.2r}; \tag{10}$$

$$b_{кц} = 0.11n_b\sqrt[3]{\frac{G}{E}\frac{rR}{r+2R}}e^{0.2r}; \tag{10a}$$

$$b_{цц} = 0.34\sqrt{\frac{G}{BE}\frac{rR}{r+R}}e^{-1.2r}. \tag{10b}$$

Розрахунок за формулами (10)–(10b) доводить, що величину експоненти можна не враховувати до величини r: у першому випадку $r \approx 250$ мм, а у другому - $r \approx 50$мм.

Якщо контактні напруження рівні допустимим і знехтувати величиною експоненти, то формули для визначення коефіцієнта тертя кочення набувають вигляд:

$$k_{кк} = 0{,}06\sqrt{\frac{G}{\sigma}}; \tag{11}$$

$$k_{кц} = 0{,}06n_b\sqrt{\frac{n_pG}{\sigma}}, \tag{11a}$$

де n_p – коефіцієнт, який залежить від тих же величин, що і n_b;

$$b_{кк} = 0.14\sqrt{\frac{G}{B\sigma}}.$$

Згідно з формулою (6а), для стійкого положення меншої кулі (циліндра) необхідно, щоб кут β був не більшим правої частини виразу:

$$\beta \leq \frac{k}{1+\frac{R}{r}\left(\frac{r^2}{r+R}-r_c\right)}. \tag{12}$$

Приймемо $r = 25$мм; $R = 50$мм; $E = 2.1 * 10^5$МПа; $B = 10$ мм; $\sigma = 1050$ МПа при лінійному і $\sigma = 1420$МПа при точковому контактах (при цих розмірах $n_b = 0.89$; $n_p = 0.99$). Величини максимальних сил, виходячи з цих допустимих напружень складають $G_{кк} = 308$; $G_{кц} = 450$; $G_{цц} = 5000$ Н.

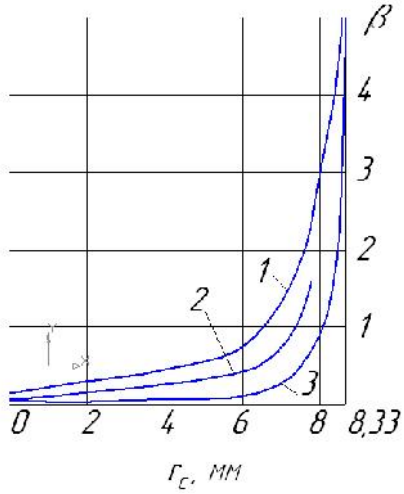

Рис. 2. Залежність максимального кута відхилення кулі (циліндра), до якого положення буде стійким, від радіуса центра ваги:

1, 2, 3 – відповідно для контактів циліндр–циліндр, куля–циліндр, куля–куля.

Залежність між r_c і β для трьох схем дотику показана на рис. 2. Зазначимо, що величині r_c = 8,33 мм відповідає величина кута β при коефіцієнті тертя кочення k=0.

Висновок. Результати проведеного дослідження дозволяють зробити наступні висновки:

– врахування реальних геометричних параметрів та механічних характеристик матеріалів при розгляді рівноважного стану кулі або циліндра на опуклих поверхнях збільшує кут рівноваги; максимальна величина кута при одних і тих радіусах і схемах дотику "куля–куля", "куля–циліндр", "циліндр–циліндр" однакова;

– класичний приклад характерів рівноваги з кулею (опір коченню не враховується), який описується в існуючій літературі,необхідно доповнити виразом «при нескінченних модулях пружності матеріалів кулі та поверхні».

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бондаренко Л. Н. Зависимость коэффициента трения качения колеса по рельсу от режима работы механизма передвижения / Бондаренко Л. Н. // Збірник наукових праць Харківської державної академії залізничного транспорту. – Харків, 1999. – Вып. 36. – С. 127-132.
2. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики : в 2 ч. : учеб. пособие / Н. Н. Бухгольц. – 10-е изд., стер. – Москва ; Ленинград : Объед. науч.-техн. изд-во НКТП СССР, 2009. – Ч. 1 : Кинематика, статика, динамика материальной точки. – 467 с. ; Ч. 2 : Динамика системы материальных точек. – 332 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Москва : Наука, 1967. – 984с.
4. Гафаров Р. Х. Что нужно знать о сопротивлении материалов : учеб. пособие для студентов вузов / Р. Х. Гафаров, В. С. Жернаков. – Москва : Машиностроение, 2001. – 275 с.
5. Дарков А. В. Сопротивление материалов : учеб. для втузов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 1989. – 624 с.
6. Джавадов И. Понятная физика : учеб. пособие / И. Джавадов. – Санкт-Петербург : Написано пером, 2014. – С. 52-64.
7. Иноземцев В. К. Общая устойчивость сооружений на неоднородном нелинейно деформируемом основании : монография / В. К. Иноземцев, Н. Ф. Синева, О. В. Иноземцева. – Саратов : Сарат. гос. техн. ун-т, 2008. – 242с.
8. Крагельский И. В. Коэффициенты трения : справ. пособие / И. В. Крагельский, И. Э. Виноградова. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Москва : Машгиз, 1962. – 228 с.
9. Миролюбов И. Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов : [для втузов] / И. Н. Миролюбов, С. А. Енгалычев, Н. Д. Сергиевский. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1985. – 399 с.
10. Стрельникова К. А. Устойчивость системы «высокий объект - основание» с учетом жесткости основания / К. А. Стрельникова // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2011. – № 1(52), вып. 1. – С. 29-35.
11. Эрдеди А. А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов : учеб. пособие для использования в учеб. процессе образоват. учреждений, реализующих программы сред. профессионал. образования / А. А. Эрдеди, Н. А. Эрдеди. – 13-е изд., стер. – Москва : Академия, 2012. – 319 с.
12. Bazant Z. P. Stability of structures: elastic, inelastic, failure and damage theories : Oxford University Press / Z. P. Bazant, L. Cedolin. – 3rd ed. – New York : World Scientific, 2010. – 1011 p.
13. Hibbeler R. C. Engineering Mechanics: Statics & Dynamics / R. C. Hibbeler, Ashok Gupta. – 11th ed. – New York : Pearson Education, 2009.
14. Tabor D. The mechanism of rolling friction / Tabor D. // Proceedings of the Royal Society. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – London, 1955. – Vol. 229, part 2 : The elastic range – P. 198-220.

REFERENCES

1. Bondarenko L. N. *Zavisimost' koeffitsienta treniya kacheniya kolesa po rel'su ot rezhima raboty mekhanizma peredvizheniya* [Dependency of coefficient of rolling friction of wheel on the rail from regime of work of the mechanism of movement]. *Zbirnik naukovykh prats Kharkivs'koi derzhavnoi akademii zaliznichnogo transportu* – Collection of scientific papers of KhSART. Kharkiv, vol. 36, 1999, pp. 127-132. (in Russian).
2. Bukhgolz N. N. *Osnovnoy kurs teoreticheskoy mekhaniki* [The Basic course of theoretical mechanics]. Moscow - Leningrad, ob. nauchn. – tekhnich. izd. NKTP, 2009. V 2ch. in 2 vol. vol. 1: Kinematika, statika, dinamika materi-

al'noy tochki – Kinematics, statics, dynamics of material point. 467 p.; vol. 2 : Dinamika sistemy material'nykh tochek – Dinamics of the system of material points. 332 p. (in Russian).
3. Vol'mir A. S. *Ustoychivost' deformiruemykh sistem* [Stability of the deformed systems]. Moscow, Nauka, 1967. 984p. (in Russian).
4. Gafarov R. H., Zhernakov V. S. *Chto nuzhno znat' o soprotivlenii materialov* [What you need to know about the strength of materials]. *Ucheb.posobie dlya studentov vuzov* – Manual for students of HSE. Moscw, Mashinostroenie, 2001. 275 p. (in Russian).
5. Darkov A. V., Shpiro G. S. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. *Ucheb.dlya vtuzov* – Manual. Moscow, Vysshaya shkola, 1989. 622 p. (in Russian).
6. Dzhavadov I. D. Po*nyatnaya fizika* [Understandable physics]. *Ucheb.posobie* – Manual. Sankt Peterburg Npisano perom, 2014. pp. 52-64. (in Russian).
7. Inozemtsev V. K., Sineva N. F., Inozemtseva O. V. *Obschaya ustoychivost' sooruzheniy na neodnorodnom nelineyno deformiruemom osnovanii* [General stability of building on the heterogeneous non linear deformed base]. *Monografiya* – Monograph. Saratov, Sarat. gos. tekhn. universitet, 2008. 242p. (in Russian).
8. Kragelsky I. V., Vinogradova I. E. *Koeffitsienty treniya* [The coefficients of friction]. *Sprav. Posobie* – Reference book. Moscow, Mashgis, 1962. 228 p. (in Russian).
9. Mirolubov I. N., Engalychev S. A., Sergievsky N. D. *Posobie k resheniyu zadach po soprotivleniyu materialov* [The manual for the solution of problems on strength of materials]. Moscow, Vysshaya shkola, 1985. 399 p. (in Russian).
10. Strelnikova K. A. *Ustoychivost' sistemy «vysokijy ob'ekt - osnovanie» s uchetom zhestkosti osnovaniya* [Stability of the system "A high object is base" taking in to account in flexibility of base]. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* – Bulletin of SSTU. 2011, no. 1(52), vol. 1, pp. 29-35. (in Russian).
11. Erdedi A. A., Erdedi N. A. *Teoreticheskaya mekhanika.* [Theoretical mechanics]. *Uchebnoe posobie* – Manual. Moscow, Academy, 2013. 319 p. (in Russian).
12. Bazant Z. P., Cedolin L. Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Failure & Damage Theories. World Scientific, 2010. – 1011 p.
13. Hibbeler R. C., Gupta Ashok Engineering Mechanics: Statics & Dynamics. 11th ed. New York, Pearson Education, 2009.
14. Tabor D. The mechanism of rolling friction. Proceedings of the Royal Society. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences. London, 1955, vol. 229, part 2 : The elastic range. pp. 198-220.

Стаття рекомендована до друку 06.07.2015 р.
Рецензент: д. т. н., проф. Заренбин В. Г.
Надійшла до редколегії: 19.06.2015 р. Прийнята до друку: 06.07.2015 р.